〈자연계열 – 3차〉

2021학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

고등학교 과정 수학에서 다루는 기본적인 내용에 대한 이해도를 평가하고자 하였다. 이를 위하여 고등학교 수학에서 배우는 함수, 극한, 삼각함수 및 확률의 개념을 알고 있는지 확인하는 문항들로 구성하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 새로운 형태로 변형하고, 이를 적용할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 극한의 개념을 이해하고, 로그함수를 활용하여 극한값을 계산하기 위한 조건을 찾을 수 있는지 평가한다.
[1.3] 주어진 자료를 토대로 두 사건이 서로 독립인지 종속인지 판별할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 삼각함수의 덧셈공식 $\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$로부터 다음을 만족하는 α와 A를 구한다.

$$\sin x + A\cos x = 2\sin x\cos\alpha + 2\cos x\sin\alpha$$

$x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면 $1=2\cos\alpha$이므로 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$이다. $x=0$을 대입하면 $A=2\sin\alpha$이므로 $\sin\alpha=\frac{A}{2}$이다. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\frac{1}{4}+\frac{A^2}{4}=1$이므로 $A=\sqrt{3}$이다$(A>0)$. 따라서 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$이다. 즉, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $A=\sqrt{3}$이다.

[1.2] $r=\frac{2}{\log_2 k}$라 치환하면, 주어진 문제는 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{999+r^n}$의 극한을 구하는 것이다. 문제의 조건에서 $k\geq 2$이므로 $0<r\leq 2$임을 알 수 있다. 따라서 양의 실수 r에 대하여 극한값은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{999+r^n}=\begin{cases}0 & ,\ 0<r<1\\ \frac{1}{1000} & ,\ r=1\\ 2 & ,\ r=2\end{cases}$$

그러므로 짝수인 자연수 k에 대해 극한값은 $0, \frac{1}{1000}, 2$이다.

[1.3] 제시문으로부터 다음을 얻을 수 있다.

	개인용 컴퓨터 있음 (A)	개인용 컴퓨터 없음	합
20세 미만(B)	220	30	250
20세 이상	120	**30**	**150**
합	340	**60**	**400**

$P(A)=\frac{340}{400}$, $P(B)=\frac{250}{400}$, $P(A\cap B)=\frac{220}{400}$ 이고, $P(A)P(B)=\frac{340}{400}\times\frac{250}{400}\neq\frac{220}{400}=P(A\cap B)$ 이므로 사건 A와 사건 B는 서로 종속사건이다.

3. 출제근거

「삼각함수」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2018, 70-74쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2018, 58-65쪽.
「수열의 극한」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2018, 10-28쪽.
「지수합수와 로그함수의 극한」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2019, 53-59쪽.
「사건의 독립과 종속」, 『고등학교 확률과 통계』, 지학사, 2018, 67-69쪽.ㅂ

[문제 2]

1. 출제배경

함수로 표현되는 도형의 넓이는 정적분을 이용하여 구할 수 있다. 함수로 표현되는 도형의 넓이와 그 역함수로 표현되는 도형의 넓이의 관계를 이해하고 있는지를 평가한다. 또한 정적분 값을 구하는 과정에서 치환적분법, 부분적분법 등 여러 가지 적분법을 이해하고 올바르게 적용하는지를 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 함수와 역함수의 합으로 주어진 도형의 넓이를 정적분으로 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 주어진 조건을 만족하는 함수로 표현된 도형의 넓이와 그 역함수로 표현되는 도형의 넓이의 관계를 이해하고 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 역함수를 구하기 어려운 함수의 역함수로 표현된 도형의 넓이와 함수로 표현된 도형의 넓이의 관계를 이해하는지 평가하고 정적분을 구하기 위하여 부분적분법, 치환적분법 등을 이해하고 올바르게 적용하는지 평가한다.

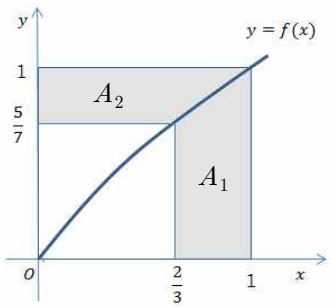
2. 예시답안 및 해설

[2.1] 구하고자 하는 적분값은

$$\int_0^1 (x^r + x^{\frac{1}{r}})\,dx = \left[\frac{1}{r+1}x^{r+1} + \frac{r}{r+1}x^{\frac{r+1}{r}}\right]_0^1 = 1$$

이다.

[2.2] 주어진 함수와 역함수가 표현하는 도형들 사이의 관계로부터 구하는 넓이는



$$A_1 + A_2 = \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\,dx + \int_{\frac{5}{7}}^1 f^{-1}(x)\,dx$$
$$= 1 - \frac{2}{3}\times\frac{5}{7} = \frac{11}{21}$$

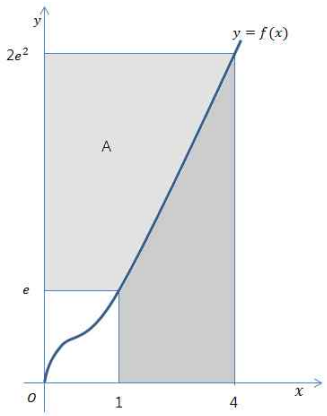
이다.

[2.3] 구하는 넓이를 A라 하면

$$A=\int_{e}^{2e^2} f^{-1}(x)\,dx$$

이다. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}>0$이므로 $f(x)$는 증가하고 일대일대응이다. $f(1)=e$이고 $f(4)=2e^2$이다. 함수와 역함수 그래프들의 대칭성으로부터

$$A=\int_{e}^{2e^2} f^{-1}(x)\,dx=8e^2-e-\int_{1}^{4} f(x)\,dx$$



이다. 부분적분법을 이용하여 적분을 구하면

$$\int_{1}^{4} f(x)\,dx=\int_{1}^{4}\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\,dx=2x\,e^{\sqrt{x}}\Big]_{1}^{4}-2\int_{1}^{4}e^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$=2x\,e^{\sqrt{x}}\Big]_{1}^{4}-2\left(\left[2\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\right]_{1}^{4}-\int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx\right)$$

$$=4e^2-2e$$

이므로

$$A=8e^2-e-(4e^2-2e)=4e^2+e$$

이다.

3. 출제근거

「역함수」, 『고등학교 수학』, 교학사, 2018, 223-226쪽.
「함수의 증가와 감소」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 교학사, 2018, 88-90쪽.
「정적분」, 『고등학교 수학Ⅱ』, 교학사, 2018, 130-132쪽.
「치환적분법」, 『고등학교 미분법』, 미래엔, 2019, 151-154쪽.
「도형의 넓이」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2019, 168-171쪽.
「부분적분법」, 『고등학교 미적분』, 천재교육, 2019, 155-162쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

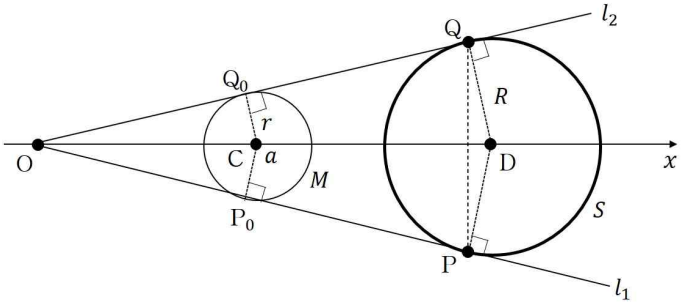
간단한 수학적 모델링을 이용하면 복잡한 자연현상을 설명할 수 있다. 학생들이 주어진 수학적 모델을 이해하고 분석할 수 있는 능력을 갖추고 있는지 확인한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 평면기하학의 기본원리를 이해하고 있는지 평가한다.
[3.2] 삼각함수의 정의를 이해하고 있는지 평가한다.
[3.3] 호도각의 원리와 이를 이용한 좌표평면의 표현을 이해하고 있는지 평가한다.
[3.4] 삼각함수의 기본 특성과 미분의 의미를 이해하고 있는지 평가한다.

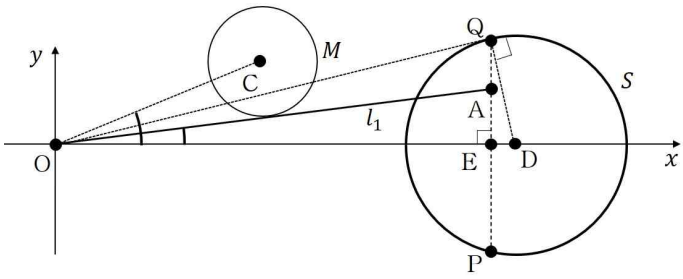
2. 예시답안 및 해설

[3.1] 아래의 그림과 같이, 원 M이 선분 OP와 접하는 점을 P_0, 선분 OQ와 접하는 점을 Q_0, 그리고 원 S의 중심을 D라 하자. 삼각형 OCQ_0과 삼각형 ODQ의 닮음을 이용하면, $a:b=r:R$에서 $\frac{r}{R}=\frac{a}{b}$임을 알 수 있다.



[3.2] 시각 $t=t_{\mathrm{Q}}$일 때, 점 A는 점 Q에 도착한다. 따라서, $\angle \mathrm{QOP}=\omega t_{\mathrm{Q}}$이며 $\angle \mathrm{QOD}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{QOP}=\frac{\omega t_{\mathrm{Q}}}{2}$이다. 삼각형 QOD에서 $\sin(\angle \mathrm{QOD})=\sin\left(\frac{\omega t_{\mathrm{Q}}}{2}\right)=\frac{\overline{\mathrm{QD}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{R}{b}=\frac{1}{2}$이고 점 Q는 제1사분면에 위치하므로 $\frac{\omega t_{\mathrm{Q}}}{2}=\frac{\pi}{6}$, 즉 $t_{\mathrm{Q}}=\frac{\pi}{3\omega}$이다.

[3.3] 시각 t에서 선분 OC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 ωt이다. 따라서 시각 t에서의 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $t=0$일때의 각의 크기에서 ωt만큼 증가한다. $t=0$에서 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\angle \mathrm{POD}=-\frac{\omega t_{\mathrm{Q}}}{2}=-\frac{\pi}{6}$이므로, 시각 t에서 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\omega t-\frac{\pi}{6}$이다.



선분 PQ와 x축이 만나는 점을 E라 하면, $0\le t\le t_{\mathrm{Q}}$일 때 점 A의 y축 좌표는 $\overline{\mathrm{OE}}\tan\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$이다. $\overline{\mathrm{OE}}$를 위의 그림에서, 삼각형 OQE와 삼각형 ODQ의 닮음을 이용하면 $\overline{\mathrm{OQ}}:\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OE}}:\overline{\mathrm{OQ}}$에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{b^2-R^2}=\sqrt{3}\,R$이므로, $\overline{\mathrm{OE}}=\frac{b^2-R^2}{b}=\frac{3R}{2}$이다. 따라서, 시각 $0\le t\le t_{\mathrm{Q}}$에서 점 A의 y축 좌표는 $\overline{\mathrm{OE}}\tan\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3R}{2}\tan\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$이다.

[3.4] 시각 t에서 점 A가 선분 PQ위를 움직이는 속력을 $v(t)$라 하면, 문제 [3.3]에서 구한 시각 t에서 점 A의 y축 좌표를 $y(t)$라 할 때, $v(t)=\left|\frac{dy(t)}{dt}\right|=\frac{3R\omega}{2}\sec^2\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$이다.

$\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$는 cos함수의 성질에 의하여 $0<\omega t<\frac{\pi}{6}$ 구간에서 증가함수이며, $\frac{\pi}{6}<\omega t<\frac{\pi}{3}$ 구간에서 감소함수이다. 따라서, $\sec^2\left(\omega t-\frac{\pi}{6}\right)$는 $0<t<\frac{t_Q}{2}$ 구간에서 감소함수이며, $\frac{t_Q}{2}<t<t_Q$ 구간에서는 증가함수이므로, 점 A의 속력은 $0<t<\frac{t_Q}{2}$ 구간인 점 P에서 출발하여 x축에 가까워질수록 감소하며, 시간 $\frac{t_Q}{2}<t<t_Q$ 구간인 x축을 지나 점 Q에 가까워질수록 증가함을 알 수 있다.

3. 출제근거

「삼각함수」,『고등학교 수학 I』, 지학사, 2018, 69-110쪽.
「속도와 거리」,『고등학교 수학 II』, 천재교과서, 2018, 140-145쪽.
「여러가지 미분법」,『미적분』, 좋은책신사고, 2018, 75-86쪽.
「속도와 거리」,『미적분』, 좋은책신사고, 2018, 160-161쪽.