〈자연계열 – 2차〉

2021학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식과 이해력을 변형된 조건에 응용하여 문제를 푸는 능력을 배양하는 데 있다. 이 문제는 여러 가지 수학 공식을 이해하고 주어진 문제에 대해 확대 적용하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 묻는 문제이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 주어진 수열의 주기성을 이용하고 등비급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 경우의 수를 계산하고 확률을 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 삼각형과 외접원의 관계를 이용하여 삼각함수로 표현되는 외접원의 반지름의 조건을 이해하고 외접원의 반지름의 길이의 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] n을 4로 나누었을 때의 나머지에 따라 분류해보자.

$n=4k-3$이면 $\sin^2\frac{(4k-3)\pi}{4}=\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$

$n=4k-2$이면 $\sin^2\frac{(4k-2)\pi}{4}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$

$n=4k-1$이면 $\sin^2\frac{(4k-1)\pi}{4}=\sin^2\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}$

$n=4k$이면 $\sin^2\frac{4k\pi}{4}=\sin^2\pi=0$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\sin^2\frac{n\pi}{4}&=\sum_{k=1}^{25}\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^{4k-3}\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{4k-2}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{4k-1}\frac{1}{2}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{25}\left(-\frac{27}{16}+\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^{4k}\\&=-\frac{3}{16}\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{2}{3}\right)^{4k}\end{aligned}$$

이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{100}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\sin^2\frac{n\pi}{4}=-\frac{3}{16}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right\}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\frac{3}{65}(A-1)$$

이다.

[1.2] A가 앉은 다음 B와 C가 앉는 방법은 아래와 같이 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) B가 A의 옆자리에 앉은 경우, B는 6자리 중 2자리에 앉을 수 있고 C는 5자리 중 4자리에 앉을 수 있으므로 확률은

$$\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

(ii) B가 A와 한 칸 떨어져 앉은 경우, B는 6자리 중 2자리에 앉을 수 있고 C는 5자리 중 2자리에 앉을 수 있으므로 확률은

$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

(iii) B가 A와 두 칸 이상 떨어져 앉은 경우, C는 주어진 조건에 맞도록 앉을 수 없다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4+2}{15}=\frac{2}{5}$이다.

[1.3] 직선 $y=(\tan\theta)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 θ이다. 직선

$$y=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}(x-\sec\theta)=\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)(x-\sec\theta)$$

의 기울기가 $\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$이므로 이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$이다. 여기서 $\theta<\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$이므로 두 직선의 교점 P는 제1사분면에 있고, 삼각형 OPQ에서 $\angle$PQO의 외각의 크기는 $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}$이다. $\angle\mathrm{OPQ}=\alpha$로 놓으면 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이고 $0<\alpha\le\frac{\pi}{6}$이다. 사인법칙에 의하여 외접원의 지름 $2R$은

$$2R=\frac{\sec\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\sin\alpha}=\frac{1}{\sin(2\alpha)\sin\alpha}$$

이다. 그런데 $\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$이므로

$$2R=\frac{1}{2\sin^2\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2(\cos\alpha-\cos^3\alpha)}$$

이다. 여기서 $\cos\alpha=t$로 치환하면 지름은

$$2R=\frac{1}{2(t-t^3)},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\le t<1$$

이므로 $f(t)=t-t^3$이 최대일 때, 외접원의 지름은 최소가 된다. $f'(t)=1-3t^2=0$에서 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{2}\le t<1$일 때 $f'(t)<0$이다. 따라서 $\frac{\sqrt{3}}{2}\le t<1$에서 $f(t)$는 감소함수이고, 구하는 최솟값은

$$2R=\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

이다.

3. 출제근거

「등비수열」, 『고등학교 수학I』, 동아출판, 2020, 115쪽-118쪽.
「여러 가지 수열의 합」, 『고등학교 수학I』, 교학사, 2020, 141-145쪽.
「삼각함수의 뜻과 그래프」, 『고등학교 수학I』, 교학사, 2020, 80-96쪽.

「확률의 뜻과 기본 성질」, 『확률과 통계』, 지학사, 2020, 45-50쪽.
「확률의 덧셈정리」, 『확률과 통계』, 지학사, 2020, 51-56쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분』, 좋은책신사고, 2020, 65-70쪽.
「사인법칙과 코사인법칙」, 『고등학교 수학 I』, 좋은책신사고, 2020, 92-97쪽.
「함수의 증가와 감소, 극대와 극소」, 『고등학교 수학 II』, 비상교육, 2020, 78-85쪽.
「도함수의 활용」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2018, 96-112쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

곡선 위의 움직이는 점들이 형성하는 도형의 넓이를 점들의 좌표의 함수로 표현하여 분석하는 수학적 분석 능력을 확인하고자 한다. 그 변하는 도형의 넓이가 최댓값을 가질 때를 찾을 수 있는지 평가한다. 이 과정에서 이차 방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 문제 속 변수의 개수를 줄여서 문제를 푸는 능력을 확인한다. 곡선이 다른 도형의 방정식과 이루는 영역의 넓이를 정적분과 도형의 넓이를 이용하여 구하는 능력을 평가한다. 곡선 위에서 움직이는 점에서 고정된 직선까지의 수선 길이의 최대 최솟값을 거리와 이차 함수 개념을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 두 도형의 방정식의 교점을 구할 수 있으며 그 과정에서 근과 계수와의 관계를 이용할 수 있는지 평가한다. 두 도형의 교점이 형성하는 삼각형의 넓이의 최댓값을 이차 함수의 최대 최솟값을 구하는 방법을 이용하여 구할 수 있는지 확인한다.
[2.2] 두 도형이 형성하는 직접 구하기 곤란한 모양의 영역의 넓이를 정적분과 기본적인 도형의 넓이를 구하는 공식을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 곡선 위에서 움직이는 점에서 고정된 직선에 내린 수선의 길이의 최대 최솟값을 구하기 위하여 한 정점에서 직선에 이르는 거리 공식과 2차 함수의 최대 최솟값을 구하는 내용을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 점 P와 Q의 x좌표를 각각 $2-\alpha$와 $2+\alpha$라 하고 삼각형 OPQ의 넓이를 $A(\alpha)$라고 하면, 선분 PQ의 길이는 $2+\alpha-(2-\alpha)=2\alpha$이고 높이는 $b=-(2-\alpha)^2+4(2-\alpha)=-\alpha^2+4$이므로

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}\times 2\alpha\times b=\alpha b=\alpha(-\alpha^2+4)=-\alpha^3+4\alpha$$

이다. $0<\alpha<2$일 때 $A'(\alpha)=-3\alpha^2+4=0$에서 $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{3}$이다. $0<\alpha<2$에서 $A(\alpha)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

α	0	…	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	…	2
$A'(\alpha)$		+	0	−	
$A(\alpha)$		증가		감소	

따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{3}$일 때 $A(\alpha)$가 최대가 되고, 이때 점 Q의 x좌표는

$$2+\alpha=2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

이다. 따라서 $uvw=2\times\frac{2}{3}\times3=4$이다.

(별해)

점 P와 Q의 x좌표를 각각 α와 β라고 하면, α와 β는 $-x^2+4x=b$의 두 근이다. 따라서 $\alpha+\beta=4$이므로 $\alpha=4-\beta$이다. 여기서 $0<\alpha<2$, $2<\beta<4$이다. 삼각형 OPQ의 넓이를 $A(\beta)$라고 하면

$$A(\beta)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(-\beta^2+4\beta)=-\beta^3+6\beta^2-8\beta$$

이다. $2<\beta<4$일 때 $A'(\beta)=-3\beta^2+12\beta-8=0$에서 $\beta=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$이다. $2<\beta<4$에서 $A(\beta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

β	2	…	$\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$	…	4
$A'(\beta)$		+	0	−	
$A(\beta)$		증가		감소	

따라서 $\beta=2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$일 때 최대가 되므로 $uvw=2\times\frac{2}{3}\times3=4$이다.

[2.2] 점 T의 좌표는 $(3,3)$이고 직선 OT의 방정식은 $y=x$이므로 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_0^3(-x^2+4x-x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

(별해)

0에서 3까지 곡선 아래의 넓이에서 점 O, 점 T, 점 $(3,0)$으로 이루어진 삼각형의 넓이를 빼면 된다. 따라서 구하는 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_0^3(-x^2+4x)\,dx-\frac{1}{2}\times3\times3=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^3-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

[2.3] 점 S에서 접선의 기울기가 1일 때 선분 SH의 길이가 최대이다. $y'=-2x+4=1$로부터 $x=\frac{3}{2}$일 때 접선의 기울기가 1이고, 점 S의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$이다. 따라서 이때 선분 SH의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{SH}}=\frac{\frac{15}{4}-\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{9}{8}\sqrt{2}$$

(별해)

직선 OT의 방정식은 $x-y=0$이다. 점 S의 좌표를 $(t,-t^2+4t)$라 하면 선분 SH의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{SH}}=\frac{|t+t^2-4t|}{\sqrt{2}}=\frac{|t^2-3t|}{\sqrt{2}}$$

그런데 $0<t<3$이므로

$$\overline{\mathrm{SH}}=\frac{-t^2+3t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}$$

이다. 따라서 선분 SH 길이의 최댓값은 $\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{9}{8}\sqrt{2}$이다.

3. 출제근거

「함수의 증가와 감소, 극대와 극소」,『고등학교 수학 II』, 비상교육, 2020, 78-85쪽.
「도함수의 활용」,『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 96-112쪽.
「정적분의 활용」,『고등학교 수학II』, 비상교육, 2020, 125-131쪽
「방정식과 부등식」,『고등학교 수학』, 금성출판사, 2018, 62-64쪽.
「점과 직선사이의 거리」,『고등학교 수학』, 금성출판사, 2018, 135-137쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

이 문제에서는 자연수들의 거듭제곱의 합과 자연수들의 합의 거듭제곱이 같기 위한 조건을 찾을 수 있는지 확인하고자 한다. 풀이 과정에서 주어진 제시문과 수학 지식을 적절히 이용하여야 한다. 주어진 식을 적절히 변형하고 정적분의 개념을 활용하여 원하는 결과를 도출할 수 있는지 평가하는 문제이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 간단한 거듭제곱과 직관을 이용하여 지수방정식의 해를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 주어진 방정식과 해가 같은 적당한 함수를 선택하여야 한다. 또 도함수를 이용하여 감소함수임을 보여서 주어진 방정식의 해가 유일함을 보일 수 있는지 평가한다.
[3.3] 유리식으로 주어진 수열의 극한이 존재하기 위한 조건을 찾고 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 제시문과 정적분을 이용하여 자연수들의 거듭제곱의 합과 자연수들의 합의 거듭제곱이 같기 위한 조건을 찾을 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] $4^2=2^4=16$이므로 $x=4$이다.

[3.2] 제시문 **(가)**를 이용하면 $x^2 = 2^x \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln 2^x$이고 $2\ln x = x\ln 2$를 만족한다. 이 때 $f(x) = 2\ln x - x\ln 2,\ x \geq 3$라고 하면,

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2 < 0$$

이므로 $f(x)$는 감소함수이다. 그런데 $f(4) = 0$이므로 $f(x) = 2\ln x - x\ln 2 = 0$의 해는 $x = 4$ 하나뿐이다. 즉, $x^2 = 2^x$의 해는 $x = 4$ 하나뿐이다.

[3.3] 분자는 $2s$차이고 분모는 $r+1$차 이므로 $2s = r+1$일 때 0이 아닌 극한값이 존재한다. 이때

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\{n(n+1)\}^s}{n^{r+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\{n(n+1)\}^s}{n^{2s}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^s = 1$$

이다.

[3.4] 주어진 관계식의 우변은 $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^s$이다. 양변을 모두 n^{r+1}로 나누면

$$\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^r + \left(\frac{2}{n}\right)^r + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^r\right\} = \frac{1}{2^s}\frac{\{n(n+1)\}^s}{n^{r+1}}$$

이고, 제시문 **(나)**에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^r \frac{1}{n} = \frac{1}{2^s} \lim_{n\to\infty} \frac{\{n(n+1)\}^s}{n^{r+1}}$$

이다. 정적분과 급수 사이의 관계와 문항 [3.3]의 결과를 이용하면

$$\int_0^1 x^r\,dx = \frac{1}{2^s}$$

이므로 $\frac{1}{r+1} = \frac{1}{2^s}$이고

$$(r+1)^2 = 2^{2s} = 2^{r+1}$$

이다. 문항 [3.2]에 의하여 $r \geq 2$일 때 이 방정식의 해는 $r = 3$ 하나뿐이다.

3. 출제근거

「지수함수와 로그함수의 활용」, 『고등학교 수학I』, 교학사, 2020, 59-62쪽.
「여러 가지 수열의 합」, 『고등학교 수학I』, 교학사, 2020, 141-145쪽.
「함수의 증가와 감수」, 『고등학교 수학II』, 좋은책신사고, 2020, 80-82쪽.
「부정적분의 계산」, 『고등학교 수학II』, 좋은책신사고, 2020, 115-118쪽.
「정적분의 계산」, 『고등학교 수학II』, 좋은책신사고, 2020, 123-126쪽.
「수열의 극한값의 계산」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 16-20쪽.
「지수함수와 로그함수의 미분」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 60-62쪽.
「정적분과 급수의 합 사이의 관계」, 『고등학교 미적분』, 미래엔, 2020, 161-164쪽.