〈자연계열 – 1차〉

2021학년도
논술전형고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

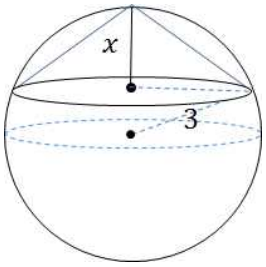
삼각함수는 삼각비를 일반화시킨 개념으로, 자연 현상이나 사회 현상 가운데 나타나는 주기적인 현상을 수학적으로 표현하여 설명하고 분석할 수 있는 유용한 주기함수이다. 미분은 함수의 순간적인 변화를 설명하는 도구로, 자연과학이나 공학뿐 아니라 경제학, 사회학 등 다양한 분야에서 활용된다. 적분은 미분과 역관계에 있으며 도형의 넓이와 부피를 구하는 데 필요한 개념이다. 또 미분과 적분은 거리, 속도 문제를 해결하는 중요한 도구이다. 이와 같은 수학적 개념들은 이공계 학습을 위한 필수적인 수학기반 지식이다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

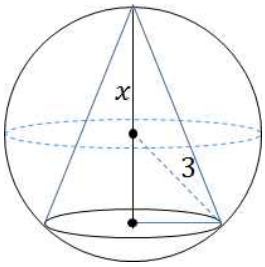
[1.1] 미분을 이용하여 다항함수의 최댓값을 찾을 수 있는지 평가한다.
[1.2] 주어진 원의 방정식을 이용하여 두 곡선의 교점을 구하고 삼각함수의 덧셈정리를 활용할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 직선거리에서의 속도와 거리에 대한 문제를 적분을 이용하여 해결할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

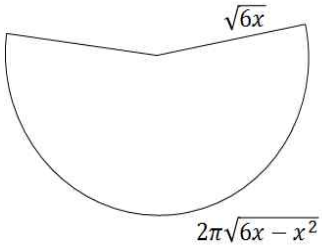
[1.1] 원뿔의 높이를 $x(0<x<6)$라 하자. [그림 1]과 같이 $0<x\le 3$이거나 [그림 2]와 같이 $3\le x<6$일 때 모두 반지름은 $\sqrt{6x-x^2}$이고, 모선의 길이는 $\sqrt{6x}$이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

원뿔을 펼친 모양은 [그림 3]과 같으므로 겉넓이는 $S=\sqrt{6x(6x-x^2)}\pi$이다. 겉넓이의 제곱 S^2을 $f(x)$라 하면

$$f(x)=6\pi^2(6x^2-x^3)$$

이다. $f(x)$를 미분하면

$$f'(x)=6\pi^2(12x-3x^2)=18\pi^2x(4-x)$$

이므로 $x=4$일 때 $f(x)$는 최대가 되고 최댓값은 $f(4)=192\pi^2$이다.

[1.2] 점 P의 좌표를 구하기 위해 $x^2-x+y^2=0$과 $x^2+y^2=\cos^2\alpha$를 풀면 $x=\cos^2\alpha$, $y^2=\cos^2\alpha\sin^2\alpha$이다. 즉 점 P의 좌표는 $(\cos^2\alpha, |\sin\alpha\cos\alpha|)$이다. 비슷하게 점 Q의 좌표를 구하기 위해 $x^2-x+y^2=0$과 $x^2+y^2=\sin^2\alpha$를 풀면 점 Q의 좌표는 $(\sin^2\alpha, |\sin\alpha\cos\alpha|)$이다. 삼각형 OPQ의 밑변을 선분 PQ로 두면 선분 PQ와 x축이 평행하므로 점 P와 점 Q의 y좌표가 삼각형 OPQ

의 높이가 된다. 따라서 삼각형 OPQ의 넓이는 다음과 같다.

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\times \cos\alpha\sin\alpha\right|$$

삼각함수의 덧셈정리

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,\ \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

에서 $x = y = \alpha$로 두면,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

를 얻는다. 이를 이용하면,

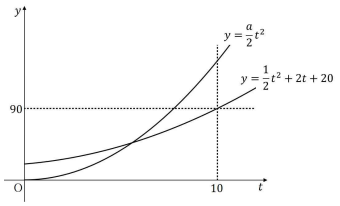
$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left|\cos 2\alpha \times \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right| = \frac{1}{8}\left|\sin 4\alpha\right|$$

이다. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$에서 $|\sin 4\alpha|$의 최댓값은 1이고 $4\alpha = \frac{\pi}{2}$ 또는 $4\alpha = \frac{3\pi}{2}$일 때 최댓값을 얻을 수 있다. 따라서 삼각형의 넓이가 최대가 될 때의 α는 $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$이다.

[1.3] 결승선까지 90m 남은 지점을 P라 하면 A가 일어나 다시 달리기 시작한 t초 후 A의 속도가 at이므로 P로부터 A가 간 거리는 $\frac{a}{2}t^2$이다. B는 2(m/s)의 속도로 10초 이동한 후 $(t+2)$(m/s)의 속도로 t초 이동하였으므로 P부터 B가 간 거리는

$$20 + \int_0^t (x+2)dx = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 20$$

이다. B가 결승선에 도착하는 시각은 $\frac{t^2}{2} + 2t + 20 = 90$일 때의 시각이므로 $t = 10$이다. $t = 10$일 때 $\frac{1}{2}at^2 > 90$이 되기 위해서는 $a > \frac{9}{5}$이 되어야 한다.



3. 출제근거

「도함수」, 『고등학교 수학II』, 좋은책신사고, 2020, 61-66쪽.
「함수의 증가와 감소」, 『고등학교 수학II』, 좋은책신사고, 2020, 80-82쪽.
「삼각함수의 뜻」, 『고등학교 수학I』, 금성출판사, 2020, 78-81쪽.
「삼각함수의 덧셈정리」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 58-62쪽.
「속도와 거리」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 153-156쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

자연현상 및 사회현상을 수학적 모델로 설명할 수 있는 능력은 이공계열 대학생이 갖춰야 하는 기본 소양이다. 고등학교 수학에서 배우는 개념들은 수학적 모델을 만들고 이해하는 데 필수적이다. 복잡하고 예측이 어려운 현상을 다루는 일이 많은 현대에는 수학적 모델에서 확률의 중요성이 계속 증가하고 있다. 본 문항에서는 제시문에 주어진 상황을 확률 및 확률변수의 기댓값 개념을 활용하여

이해하고 해결할 수 있는지 평가하고자 하였다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 중복조합을 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 특정한 사건의 확률을 계산할 수 있는지와 확률변수의 기댓값을 계산할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 확률변수의 값을 적절히 계산할 수 있는지와 수열의 합을 이용하여 기댓값을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 비밀번호의 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수를 각각 x, y, z라고 하면

$$x+y+z=9 \ (0 \le x \le 9,\ 0 \le y \le 9,\ 0 \le z \le 9)$$

를 만족해야 한다. 이를 만족하는 정수 x, y, z 순서쌍의 개수는 x, y, z를 중복을 허용하여 9개 선택하는 방법의 수와 같다. 따라서 가능한 비밀번호는

$$_3H_9 = {}_{11}C_9 = 55$$

가지이다.

[2.2] 확률변수 X는 비밀번호를 맞힐 때까지 네 자리 번호를 입력한 횟수이다. A_i를 i번째에 비밀번호를 맞히는 사건, $i \ge 2$일 때 B_i를 $i-1$번째까지 비밀번호를 맞히지 못할 사건이라고 하자. 그러면 $P(A_1)=\frac{1}{55}$이고 $2 \le i \le 55$일 때, $i-1$번째까지 비밀번호를 맞히지 못하고 i번째에 비밀번호를 맞히는 사건의 확률은

$$P(A_i \cap B_i) = P(B_i) \times P(A_i | B_i)$$
$$= \left\{\left(1-\frac{1}{55}\right)\left(1-\frac{1}{54}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{55-(i-2)}\right)\right\} \times \left(\frac{1}{55-(i-1)}\right) = \frac{1}{55}$$

이다. 따라서 $1 \le i \le 55$일 때 $P(X=i)=\frac{1}{55}$이다. 그러므로 기댓값 $E(X)$는

$$\sum_{i=1}^{55}(i \times P(X=i)) = \sum_{i=1}^{55}\frac{i}{55} = \frac{1}{55} \times \frac{55(55+1)}{2} = 28$$

이다.

[2.3] 확률변수 Y는 비밀번호를 맞힐 때까지 걸리는 시간이다. 네 자리 번호를 한 번 입력하는데 5초가 걸리고, 5번 틀린 후에는 20초 동안 입력할 수 없다. 따라서 $i-1$번째까지 비밀번호를 맞히지 못하고 i번째 비밀번호를 입력할 경우, i번째 비밀번호를 입력할 때까지 걸리는 시간은

$$\begin{array}{l} 5i, \quad 1 \le i \le 5 \\ 5i+20, \ \ 6 \le i \le 10 \\ \vdots \\ 5i+200, \ \ 51 \le i \le 55 \end{array}$$

이고

$$P(Y=5i) = P(X=i) = \frac{1}{55}, \ \ 1 \le i \le 5$$
$$P(Y=5i+20) = P(X=i) = \frac{1}{55}, \ \ 6 \le i \le 10$$
$$\vdots$$
$$P(Y=5i+200) = P(X=i) = \frac{1}{55}, \ \ 51 \le i \le 55$$

이다. 따라서 $E(Y)$는

$$\sum_{i=1}^{55}\left(\frac{1}{55}\times 5i\right)+\frac{1}{55}(0\times 5+20\times 5+\cdots+200\times 5)=240$$

이다.

3. 출제근거

「중복조합」, 『고등학교 확률과 통계』, 좋은책신사고, 2020, 23-25쪽.
「조건부 확률」, 『고등학교 확률과 통계』, 좋은책신사고, 2020, 53-61쪽.
「이산확률변수의 평균과 표준편차」, 『고등학교 확률과 통계』, 좋은책 신사고, 2020, 84-90쪽.
「여러 가지 수열의 합」, 『고등학교 수학I』, 좋은책신사고, 2020, 136-139쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

함수의 극한은 현대 수학에서 핵심적인 개념으로 생물의 개체 수나 물체의 온도 같이 제한된 환경에서 특정한 값에 한없이 가까워지는 현상을 수학적으로 표현하는 도구이다. 미분은 함수의 순간적인 변화를 설명하는 도구로, 자연과학이나 공학뿐 아니라 경제학, 사회학 등 다양한 분야에서 활용된다. 적분은 미분과 역관계에 있으며 도형의 넓이와 부피를 구하는데 필요한 개념이다. 삼각함수는 주기를 갖는 함수들을 표현하는 유용한 도구이다. 본 문제에서는 함수의 극한, 미분, 적분과 삼각함수를 이용하여 그래프로 표현된 도형의 넓이의 변화를 해석할 수 있는지 평가한다.

각 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 탄젠트 함수의 합과 차에 관한 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 분자와 분모가 모두 발산하는 꼴의 극한을 구할 수 있고 복잡한 식을 유리화할 수 있는지 평가한다. 곡선 혹은 직선과 직선과의 교점, 곡선의 접선, 직선의 x절편과 y절편을 구할 수 있는지에 대한 평가를 포함한다. 이 문제를 해결하기 위해서는 함수의 수렴과 발산을 판단할 수 있어야 한다.
[3.3] 곡선과 직선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 직선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_1, 직선 l_2가 x의 양의 축이 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면 $\theta=\theta_1-\theta_2$이다. P_1, P_2의 좌표를 구하기 위해 방정식 $t-x^2=tx$을 풀어 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha=-\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{t^2+4t}}{2},\ \beta=-\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{t^2+4t}}{2}$$

이다. $\mathrm{P}_1(\alpha, t\alpha)$과 $\mathrm{P}_2(\beta, t\beta)$에서의 $y=t-x^2$의 접선의 기울기는 각각 -2α, -2β이다. 따라서 $\tan\theta_1=-2\alpha$, $\tan\theta_2=-2\beta$이다.

$$\tan^2\theta=\tan^2(\theta_1-\theta_2)=\left(\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right)^2=\left(\frac{-2\alpha+2\beta}{1+4\alpha\beta}\right)^2=\frac{4(\alpha-\beta)^2}{(1+4\alpha\beta)^2}=\frac{4\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}{(1+4\alpha\beta)^2}$$

이므로 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=-t$, $\alpha\beta=-t$이므로 위 식은 다음과 같이 정리된다.

$$\tan^2\theta=\frac{4(t^2+4t)}{(1-4t)^2}=\frac{4t^2+16t}{16t^2-8t+1}$$

[3.2] 직선 l_1의 방정식은 $y=(t-\sqrt{t^2+4t})x-\frac{(t-\sqrt{t^2+4t})\sqrt{t^2+4t}}{2}$ 이므로 x절편은 $\frac{\sqrt{t^2+4t}}{2}$, y절편은 $\frac{(\sqrt{t^2+4t}-t)\sqrt{t^2+4t}}{2}$ 이다. 따라서

$$A_1(t)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{t^2+4t}}{2}\times\frac{(\sqrt{t^2+4t}-t)\sqrt{t^2+4t}}{2}=\frac{(t^2+4t)(\sqrt{t^2+4t}-t)}{8}$$

이다.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_1(t)}{t^k}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{(t^2+4t)(\sqrt{t^2+4t}-t)}{8t^k}\times\frac{\sqrt{t^2+4t}+t}{\sqrt{t^2+4t}+t}\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+4t)}{8t^k}\frac{4t}{\sqrt{t^2+4t}+t}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+4t)}{t^k}$$

위 극한은 $k<2$이면 발산하고 $k>2$이면 극한값이 0이다. $k=2$일 때 극한값은 $\frac{1}{4}$이다. 따라서 극한값은 $0,\frac{1}{4}$이다.

[3.3] 직선 l_2의 방정식은 $y=(t+\sqrt{t^2+4t})x+\frac{(t+\sqrt{t^2+4t})\sqrt{t^2+4t}}{2}$ 이므로 x절편은 $-\frac{\sqrt{t^2+4t}}{2}$, y절편은 $\frac{(t+\sqrt{t^2+4t})\sqrt{t^2+4t}}{2}$ 이다. 즉, 삼각형의 넓이 $A_2(t)$는 다음과 같다.

$$A_2(t)=\frac{(t^2+4t)(t+\sqrt{t^2+4t})}{8}$$

곡선과 직선 사이의 넓이 $S(t)$는 적분을 이용하여 구할 수 있다.

$$S(t)=\int_\beta^\alpha(t-x^2-tx)dx=\left[tx-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}tx^2\right]_\beta^\alpha=\frac{(t^2+4t)\sqrt{t^2+4t}}{6}$$

이다. 따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{A_2(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+4t)\sqrt{t^2+4t}}{6}\frac{8}{(t^2+4t)(t+\sqrt{t^2+4t})}=\frac{2}{3}$$

이다.

3. 출제근거

「함수의 극한의 성질」, 『고등학교 수학 II』, 교학사, 2020, 21-25쪽.
「미분계수」, 『고등학교 수학 II』, 교학사, 2020, 55-59쪽.
「접선의 방정식」, 『고등학교 수학 II』, 교학사, 2020, 80-82쪽.
「다항함수의 정적분」, 『고등학교 수학 II』, 교학사, 2020, 134-136쪽.
「두 곡선 사이의 넓이」, 『고등학교 수학 II』, 교학사, 2020, 146-148쪽.
「삼각함수의 덧셈공식」, 『고등학교 미적분』, 비상교육, 2020, 58-62쪽.