〈자연계열-온라인〉

2019학년도

모의논술**고사 출제배경 및 해설**

SEOULTECH

서울과학기술대학교

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

수학을 배우는 목적 중 하나는 수학 지식과 이해력을 변경된 조건에 응용하여 문제를 푸는 능력을 배양하는데 있다. 이 문제는 수학공식을 이해하고 주어진 문제에 대해 확대 적용하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 묻는 문제이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 두 개의 항을 갖는 이항정리의 개념을 정확히 이해하고, 이를 3개의 항을 갖는 식의 이항정리에 적용할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 2차 함수의 최댓값과 최솟값을 이해하고 구할 수 있는지 평가한다. 또한 정적분과 부분적분법을 이용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다.
[1.3] 경우의 수를 계산하고 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 이항전개에 의하여

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^7 &= x^7+7x^6\left(\frac{1}{x}+1\right)+21x^5\left(\frac{1}{x}+1\right)^2+35x^4\left(\frac{1}{x}+1\right)^3+\cdots \\ &= x^7+\left(7x^5+7x^6\right)+21x^5\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}+1\right)+35x^4\left(\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x}+1\right)\cdots \\ &= x^7+7x^6+\left(7x^5+21x^5\right)+\left(42x^4+35x^4\right)+\cdots\end{aligned}$$

이다. 따라서 x^4의 계수는 77이다.

[1.2] $x=1$일 때 최댓값 3을 가지므로 $f(x)=a(x-1)^2+3$이고 $a<0$이다. 주어진 두 곡선 사이의 넓이는

$$\begin{aligned}A &= \int_2^3 \left\{a^2(x-1)^4+6a(x-1)^2+9\right\}\ln(x-1)\,dx \\ &\quad+\int_2^3\left\{\frac{a^2}{5}(x-1)^4+2a(x-1)^2+\frac{9x}{x-1}\right\}dx\end{aligned}$$

인데, 첫 번째 정적분을 부분적분하면

$$\begin{aligned}A &= \left[\left\{\frac{a^2}{5}(x-1)^5+2a(x-1)^3+9x\right\}\ln(x-1)\right]_2^3 \\ &= \left(\frac{32}{5}a^2+16a+27\right)\ln 2 \\ &= \frac{32\ln 2}{5}\left(a+\frac{5}{4}\right)^2+17\ln 2\end{aligned}$$

이므로 $a=-\frac{5}{4}$일 때 최솟값 $17\ln 2$를 갖는다. 이때

$$f(x)=-\frac{5}{4}(x-1)^2+3=-\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}$$

이므로 $a-b+c=-\frac{5}{4}-\frac{5}{2}+\frac{7}{4}=-2$이다.

[1.3] X_1과 X_2의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X_i	1	2	3	4	합계
$P(X_i = x)$	0.1	0.2	0.3	0.4	1

여기서 $E(X_i) = 3$이고, $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$이라 하면, $E(\overline{X}) = 3$이다. 따라서

$$E(X_1 + X_2) = 2E(\overline{X}) = 2 \times 3 = 6$$

이다.

3. 출제근거

「이항정리」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 38-41쪽.
「곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 157-158쪽.
「부분적분법」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 145-146쪽.
「표본평균」, 『확률과통계』(고등학교 교과서), 비상교육, 2016, 102, 127-130쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

이 문제는 현상을 설명하는 내용을 이해한 뒤, 이를 수학적 언어로 서술하고 수학 개념을 이용하여 논리적으로 설명할 수 있는지 묻는 문제이다. 즉 급수의 합을 구하고 계산한 결과를 이용하여 또 다른 급수의 합과 수열의 성질을 증명할 수 있는지 물어보는 문제이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] 주어진 설명에 따라 a_1과 a_2의 값을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.2] 급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.3] 부분분수로 나누어 부분합을 구하고, 부분합의 극한을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는지 평가한다.
[2.4] 주어진 성질를 수학적 귀납법을 활용하여 증명할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 첫째 날 학생 수는 2명이므로 $a_1 = 3$이고, 둘째 날 학생 수는 3명이므로 3팀이고 9문제를 풀었다. 따라서 $a_2 = a_1 + 9 = 12$이다.

[2.2] n번째 날 학생 수는 $n+1$명이므로 두 명씩 팀은 ${}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$개가 있고

$$n\text{번째 날에 푼 문제 수} = \frac{3}{2}n(n+1)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} a_n &= 3+\frac{3}{2}\cdot 2\cdot 3+\cdots+\frac{3}{2}n(n+1) \\ &= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1) \\ &= \frac{3}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

이다.

[2.3] 임의의 n에 관하여

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

라 하면 $A=1$, $B=-2$, $C=1$이므로, 부분합을 계산하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

이다.

[2.4] 수학적 귀납법으로 증명해보자. $4a_1=4\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2}=a_2$이므로 $n=1$일 때 성립한다.

$n=k$일 때 성립한다고 하면

$$a_{k+1}=\frac{5}{k(k+4)}\{4a_1+5a_2+\cdots+(k+3)a_k\}$$

이다. 이때

$$\begin{aligned} 4a_1+5a_2+\cdots+(k+4)a_{k+1} &= \{4a_1+5a_2+\cdots+(k+3)a_k\}+(k+4)a_{k+1} \\ &= \frac{k(k+4)}{5}a_{k+1}+(k+4)a_{k+1} \\ &= \frac{(k+4)(k+5)}{5}a_{k+1} \\ &= \frac{(k+4)(k+5)}{5}\cdot\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+5)}{5}a_{k+2} \end{aligned}$$

이므로

$$a_{k+2}=\frac{5}{(k+1)(k+5)}\{4a_1+5a_2+\cdots+(k+4)a_{k+1}\}$$

이다. 즉, $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 n에 대하여 성립한다.

3. 출제근거

「조합」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2017, 32-34쪽.

「자연수의 거듭제곱의 합」, 『수학II』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 134-136쪽.
「급수」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 27-28쪽.
「수열의 극한값의 계산」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 15-18쪽.
「수학적 귀납법」, 『수학II』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 137-143쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

이 문제는 공간도형에 관한 문제이다. 직선의 위치관계를 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 평면의 방정식을 구하고, 이를 이용하여 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 두 직선이 꼬인 위치에 있음을 이해하고 보일 수 있는지 평가한다.
[3.2] 한 직선을 포함하고 또 다른 직선과 만나지 않는 평면을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 두 직선 사이의 거리를 구할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 직선 l_1의 방향벡터는 $\overrightarrow{d_1}=(1,3,4)$, 직선 l_2의 방향벡터는 $\overrightarrow{d_2}=(2,3,2)$이고

$$\overrightarrow{d_1} \neq k\overrightarrow{d_2}$$

이므로 두 직선은 평행하지 않다.

두 직선이 만나려면 $l_1 : x-1=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{4}$와 $l_2 : \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$를 동시에 만족하는 x,y,z가 있어야 한다.

$$3x-3=y-2,\ 3x-6=2y+2$$

를 풀면 $x=-2$, $y=-7$이므로 l_1에서는 $z=-16$이고, l_2에서는 $z=-4$이다. 따라서 l_1과 l_2를 동시에 만족하는 x,y,z가 없으므로 두 직선은 만나지 않는다.

[3.2] 평면 α의 법선벡터를 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$라고 하면 $\overrightarrow{n}$은 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$와 서로 수직이므로

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d_1}=a+3b+4c=0$$
$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{d_2}=2a+3b+2c=0$$

이다. b를 소거하면 $-a+2c=0$이므로 $\overrightarrow{n}=(2,-2,1)$이다. 따라서 l_2 위의 점, 예를 들면, 점 $(2,-1,0)$을 지나고 $\overrightarrow{n}$에 수직인 평면을 구하면 되므로

$$2(x-2)-2(y+1)+z=0,$$

즉, $2x-2y+z-6=0$이다.

[3.3] 직선 l_1 위의 점 $(1,2,-4)$와 평면 α 사이의 거리를 구하면

$$d=\frac{|2-4-4-6|}{\sqrt{4+4+1}}=4$$

이다.

3. 출제근거

「두 직선의 위치관계」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2017, 126-127쪽.
「공간 벡터의 내적」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2017, 169-172쪽.
「벡터의 내적과 수직」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2017, 174-175쪽.
「좌표공간에서의 직선의 방정식」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2017, 176-181쪽.
「평면의 방정식」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2017, 182-186쪽.
「점과 평면 사이의 거리」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), ㈜교학사, 2017, 188쪽.