▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 함수의 일계도함수의 부호를 이용하여 함수의 증감을 판별할 수 있는지를 평가
· 함수의 이계도함수의 부호를 이용하여 함수의 볼록성을 판별할 수 있는지를 평가
· 증가함수 또는 볼록함수의 개념과 부등식의 관련성을 이해하는지를 평가
· 적절한 함수의 일계도함수 또는 이계도함수를 이용하여 여러 가지 부등식을 유도할 수 있는지를 평가
· 수학적 귀납법을 이용하여 모든 자연수에 대하여 성립하는 부등식을 증명할 수 있는지를 평가

2. 문항해설

제시문 [가]는 2009 개정교육과정 “[미적분 I]-[다] 다항함수의 미분법-[3] 도함수의 활용”와 “[미적분 II]-[다] 미분법-[2] 도함수의 활용”에 해당하는 제시문이다. 함수의 증가와 감소를 그 함수의 도함수의 부호를 조사하여 판정하는 방법을 서술하였다.

제시문 [나]는 2009 개정교육과정 “[미적분 II]-[다] 미분법-[2] 도함수의 활용”에 해당하는 제시문이다. 함수가 아래로 볼록(또는 아래로 오목)하다는 것이 무엇을 의미하는지를 서술하였다.

제시문 [다]는 2009 개정교육과정 “[미적분 II]-[다] 미분법-[2] 도함수의 활용”에 해당하는 제시문이다. 함수의 볼록을 그 함수의 이계도함수의 부호를 조사하여 판정하는 방법을 서술하였다.

문제 [1]은 수학적 귀납법을 이용하여 2 이상의 모든 자연수에 대하여 성립하는 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-[2] 명제”에서 ‘절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다’라고 명시하고 있으며, “[수학 II]-[다] 수열-[3] 수학적 귀납법”에서 ‘수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다’라고 명시하고 있다. 전형적인 수학적 귀납법을 적용하여 2 이상의 모든 자연수에 대하여 성립하는 부등식을 증명하는 문항이다.

문제 [2]은 미분법을 활용하여 유용한 부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-[2] 명제”에서 ‘절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다’라고 명시하고 있으며, “[미적분 I]-[다] 다항함수의 미분법-[3] 도함수의 활용”에서 ‘함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.’, ‘함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다’와 ‘방정식과 부등식에 활용할 수 있다’라고 명시하고 있다. 또한, “[미적분 II]-[다] 미분법-[2] 도함수의 활용”에서 ‘방정식과 부등식에 활용할 수 있다’라고 명시하고 있다. 부등식에 나오는 여러 가지 변수들 중에서 하나를 정하여 이 변수에 대한 다항함수를 생각하여 제시문 [가]에서 주어진 도함수의 부호를 이용한 함수의 증가와 감소를 판별

하는 방법을 적용하면 원하는 부등식을 증명할 수 있다.

문제 [3]은 주어진 명제의 역을 이해하고 그 역의 참과 거짓을 판별할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-[2] 명제”에서 ‘명제의 역과 대우를 이해한다’라고 명시하고 있다. 문제 [3]에서 주어진 명제의 역을 이해하고 제시문 [나]와 문제 [2]를 활용하여 그 역이 참인지 거짓인지를 판별한다.

문제 [4]는 미분법을 활용하여 유용한 부등식을 유도할 수 있는지를 평가한다. 2009 개정교육과정 “[수학 II]-[가] 집합과 명제-[2] 명제”에서 ‘절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다’라고 명시하고 있으며, “[미적분 II]-[다] 미분법-[2] 도함수의 활용”에서 ‘방정식과 부등식에 활용할 수 있다’라고 명시하고 있다. 또한, “[미적분 II]-[가] 지수함수와 로그함수-[2] 지수함수와 로그함수의 미분”에서 ‘지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다’라고 명시하고 있다. 부등식과 관련하여 로그를 포함한 함수를 생각하여 제시문 [다]에서 주어진 이계도함수의 부호를 이용한 함수의 볼록과 오목을 판별하는 방법을 적용한 다음, 제시문 [나]에서 주어진 볼록함수의 정의를 이용하면 원하는 부등식을 증명할 수 있다.

3. 채점기준

1-1
수학적 귀납법의 형식을 정확히 사용하여 부등식을 증명하였는지를 평가한다.

1-2
함수의 일계도함수의 부호를 이용하여 그 함수의 증가 또는 감소를 판단할 수 있는지를 평가한다.

1-3
명제의 역의 참 또는 거짓을 판단하기 위해 증명 또는 반례를 이용할 수 있는가를 평가한다.

1-4
제시문에서 주어진 사실들을 적절히 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가한다.

4. 예시답안 및 예시답안에 대한 근거

문제 1. $n=2$ 일 때,

$$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4}>0$$

이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n<\frac{a^n+b^n}{2}$$

이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}&=\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&>\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\\&=\frac{(a^n-b^n)(a-b)}{4}\end{aligned}$$

이다. 여기서 함수 $g(x)=x^n$ 이 양의 실수 전체의 집합에서 증가함수이므로 $a>b$ 이면 $a^n>b^n$ 이고 반대로 $a<b$ 이면 $a^n<b^n$ 이다. 따라서

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1}>\frac{(a^n-b^n)(a-b)}{4}>0$$

이다. 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 주어진 부등식이 2 이상의 임의의 자연수 n 에 대하여 성립한다.

문제 2. $0<t<1$ 인 실수 t 를 고정시키고, 실수 전체의 집합에서 정의된 다음의 함수를 생각하자.

$$f(x)=(1-t)a^n+tx^n-\{(1-t)a+tx\}^n\quad(-\infty<x<\infty)$$

함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 미분가능하고

$$f'(x)=ntx^{n-1}-nt\{(1-t)a+tx\}^{n-1}=nt\left[x^{n-1}-\{(1-t)a+tx\}^{n-1}\right]$$

이다. 한 편, n 이 짝수이므로 $n-1$ 은 홀수이고 따라서 다항함수 $g(x)=x^{n-1}$ 은 실수 전체의 집합에서 증가함수이다. 그러므로 $x>a$ 이면 $x>(1-t)a+tx$ 이므로 $f'(x)>0$ 이다. 제시문 [가]에 의하여 다항함수 $f(x)$ 가 구간 (a,∞) 에서 증가하고 $b>a$ 이므로 $f(b)>f(a)=0$ 이 성립한다.

문제 2의 다른 풀이. 실수 전체의 집합에서 정의된 다음의 함수를 생각하자.

$$f(t)=(1-t)a^n+tb^n-\{(1-t)a+tb\}^n\quad(-\infty<t<\infty)$$

함수 $f(t)$ 는 다항함수이므로 미분가능하고

$$f'(t)=b^n-a^n-n\{(1-t)a+tb\}^{n-1}(b-a)$$

이다. 평균값정리에 의해서

$$b^n-a^n=nc^{n-1}(b-a)$$

인 c 가 열린 구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 임의의 실수 t 에 대하여

$$f'(t)=n\left[c^{n-1}-\{(1-t)a+tb\}^{n-1}\right](b-a)$$

로 쓸 수 있다. 한 편, n이 짝수이므로 $n-1$은 홀수이고 따라서 다항함수 $g(x)=x^{n-1}$은 실수 전체의 집합에서 증가함수이다. 그러므로 $t<t_0=(c-a)/(b-a)$이면 $(1-t)a+tb<c$이므로 $f'(t)>0$이고 마찬가지로 $t>t_0$이면 $f'(t)<0$이다. 제시문 [가]에 의하여 함수 $f(t)$는 구간 $[0,t_0)$에서 증가하고 구간 $(t_0,1]$에서는 감소하므로, $0<t<t_0$이면 $f(t)>f(0)=0$이고 $t_0<t<1$이면 $f(t)>f(1)=0$이다. 또한, 함수 $f(t)$가 $t=t_0$에서 연속이고 $(0,t_0)$에서 증가하므로 $f(t_0)=\lim_{t\to t_0-}f(t)>0$이다. 따라서 $0<t<1$인 임의의 실수 t에 대하여 $f(t)>0$이 성립한다.

문제 3. 문제 [2]와 제시문 [나]로부터 사차함수 $f(x)=x^4$의 그래프가 아래로 볼록하다는 것을 알 수 있다. 그러나 $f''(x)=12x^2$이므로 $f''(0)=0$이다. 따라서 주어진 명제의 역은 성립하지 않는다.

문제 4. 함수 $f(x)=x\ln x$에 대하여

$$f'(x)=\ln x+1,\ f''(x)=\frac{1}{x}$$

이므로 모든 양의 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이다. 따라서 제시문 [다]에 의하여 함수 $f(x)$가 양의 실수 전체의 집합에서 아래로 볼록하다. 그러므로 서로 다른 양의 실수 x,y에 대하여

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

즉,

$$\frac{x+y}{2}\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{x\ln x+y\ln y}{2}$$

가 성립한다. 이를 정리하면,

$$(x+y)\ln(x+y)<x\ln x+y\ln y+(x+y)\ln 2$$

을 얻는다.

문제 4의 다른 풀이. 양의 실수 t에 대한 함수 $f(t)=t\ln t+(t+1)\ln 2-(t+1)\ln(t+1)$에 대하여

$$f'(t)=\ln t+\ln 2-\ln(t+1)=\ln\left(\frac{2t}{t+1}\right)$$

이므로 $t>1$이면 $f'(t)>0$이고 $0<t<1$이면 $f'(t)<0$이다. 제시문 [가]에 의하여 함수 $f(t)$가 구간 $(1,\infty)$에서 증가하고 구간 $(0,1)$에서 감소하므로, 1이 아닌 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)>f(1)=0$가 성립한다. 임의의 서로 다른 양의 실수 x,y에 대하여 $x/y\neq 1$이므로 부등식 $f(x/y)>0$이 성립하고 이를 정리하면 원하는 부등식을 얻는다.