■ **유의사항**
1. 시험시간은 50분입니다.

문제

문제 1. a, b가 서로 다른 양의 실수이다. 부등식

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n < \frac{a^n+b^n}{2}$$

이 2 이상의 임의의 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보여라.

문제 2. a, b가 $a<b$인 실수이고 n이 2의 배수인 자연수이다. $0<t<1$인 임의의 실수 t에 대하여, 부등식

$$\{(1-t)a+tb\}^n < (1-t)a^n + tb^n$$

이 성립함을 제시문 [가]를 이용하여 보여라.

문제 3. 제시문 [다]로부터 어떤 구간에서 이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$가 이 구간의 모든 x에 대하여 $f''(x)>0$이면, 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다는 것을 알았다. 이 명제의 역이 성립하는지를 조사하여라.

문제 4. 서로 다른 양의 실수 x, y에 대하여 부등식

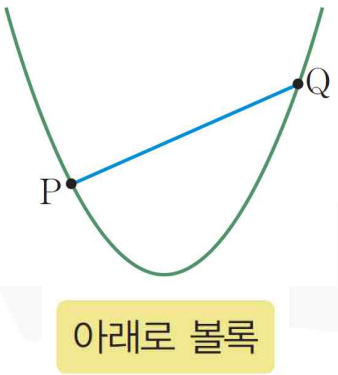
$$(x+y)\ln(x+y) < x\ln x + y\ln y + (x+y)\ln 2$$

이 성립함을 보여라.

제시문

[가] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. 이 명제의 역은 성립하지 않는다. 예를 들어, 삼차함수 $f(x)=x^3$은 실수 전체의 집합에서 증가하지만 도함수가 $f'(x)=3x^2$이므로 $x=0$에서의 미분계수가 $f'(0)=0$이다. 또한, 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이면, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

[나] 어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.



[다] 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 이계도함수를 가지고 이 구간의 모든 x에 대하여 $f''(x)>0$이면, 그 구간에서 $f'(x)$가 증가하므로 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기도 증가한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

