〈자연계열〉

2018학년도 논술전형
모의고사 출제배경 및 해설

SEOULTECH
서울과학기술대학교
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

[문제 1]

1. 출제배경

이 문제는 현상을 설명하는 내용을 이해하고 수학적 언어로 서술할 수 있는지 살피는데 목적이 있다. 수학 개념을 이용하여 논리적으로 설명할 수 있는지를 묻는 문제이다. 또한 일상생활에서 직면하는 문제를 수학적으로 해결하는 능력을 물어보는 문제이다. 여기에 사용된 수학적 개념은 고등학생이면 누구나 알고 있는 간단한 내용이다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[1.1] 주어진 상황을 수학적 표현으로 나타낼 수 있는지, 사이값 정리(중간값 정리)를 이용하여 원하는 결과를 논리적으로 유추할 수 있는지 평가한다.
[1.2] 시간과 거리와의 관계를 이용하여 간단한 유리방정식을 만들고 풀 수 있는지 평가한다.
[1.3] 미분가능 함수들에 대한 가장 중요한 정리중의 하나가 평균값 정리이다. 두 사람의 속도가 같은 시각이 두 번 이상이라면, 가속도가 같은 시각이 있음을 평균값 정리를 이용하여 논리적으로 설명할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[1.1] 측정을 시작할 때 갑은 $\frac{10}{3}$km 되는 지점에 있고 $\frac{1}{6}$시간 후에 반환점에 도달하며 $\frac{1}{3}$시간 후에는 반환점으로부터 $\frac{4}{3}$km 되는 지점에 있다. 측정을 시작할 때 을은 출발점에 있고 $\frac{1}{3}$시간 후에 반환점에 도달한다. 측정을 시작한지 t시간 후의 갑과 을의 출발지점으로부터의 거리를 각각 $A(t)$, $B(t)$라 하면, $A(t)=B(t)$되는 t가 0과 $\frac{1}{3}$ 사이에 존재함을 보이면 된다.

$$f(t)=A(t)-B(t)$$

라 하면, $f(t)$는 연속이고

$$f(0)=A(0)-B(0)=\frac{10}{3}>0$$

이고

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=A\left(\frac{1}{3}\right)-B\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{11}{3}-5=-\frac{4}{3}<0$$

이다. 사이값 정리(중간값 정리)에 의하여 $f(t)=A(t)-B(t)=0$되는 t가 존재한다. 즉 $A(t)=B(t)$되는 t가 존재한다.

[1.2] 출발점으로부터 $x$km 떨어진 지점에서 두 사람이 만난다고 하자. $\frac{1}{6}$시간 후에 갑은 반환점에 있고 을은 출발점으로부터 $\frac{5}{2}$km 지점에 있다. 이때부터 t시간 후 두 사람이 만난다고 하면

$$t=\frac{5-x}{8},\quad t=\frac{x-5/2}{15}$$

이므로

$$\frac{5-x}{8}=\frac{x-5/2}{15}$$

이다. 이 방정식을 풀면 $75-15x=8x-20$이므로 $x=\frac{95}{23}\,\mathrm{km}$이다.

[1.3] $g(t)=v_1(t)-v_2(t)$라 하자. 두 사람의 속도가 같은 시각을 t_1과 t_2라 하면 $g(t_1)-g(t_2)=0$이다. 평균값 정리에 의하여

$$0=\frac{g(t_1)-g(t_2)}{t_1-t_2}=g'(c)$$

가 되는 c가 t_1과 t_2 사이에 존재한다. 그런데 $g'(c)=v_1'(c)-v_2'(c)=a_1(c)-a_2(c)$이므로

$$a_1(c)=a_2(c)$$

이다.

3. 출제근거

「연속함수의 성질」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 66-70쪽.
「평균값 정리」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 100-103쪽.
「속도와 가속도」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 비상교육, 2017, 116-118쪽.
「유리함수」, 『수학II』(고등학교 교과서), 지학사, 2017, 93-101쪽.

[문제 2]

1. 출제배경

일상생활에서 빛은 사람이 살아가는 데 기본이 된다. 그만큼 물리학의 한 분야로서 광학은 빛을 다루는 기본적인 학문이다. 여기에 수학적인 개념은 빛의 성질을 이해하는데 매우 중요하다. 이 문제는 빛의 중요한 성질인 반사의 법칙을 미분법을 이용하여 풀고, 이를 응용해 주어진 두 개의 판 사이에서 빛의 이동 경로를 생각해보는데 있다. 이를 통해 일상생활에서 접하는 문제 현상을 수학 개념과 연결하여 해결할 수 있는지 평가하고자 하였다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[2.1] '거리 = 시간×속력' 공식을 이용하여 주어진 지점까지 도달하는데 걸리는 시간을 함수로 나타낼 수 있는지를 평가한다. 따라서 수학적 표현 능력을 평가한다.
[2.2] 시간으로 나타낸 함수에 대해 미분을 통해 입사각=반사각이 되는 것을 보일 수 있는지 평가한다.
[2.3] 평행하게 놓인 두 개의 판 사이에서 빛이 반사 디면서 이동하는 것과 주어진 상황을 만족하는 조건을 찾아내는 것으로 논리적 추론능력을 갖추고 있는지 평가한다.
[2.4] 반사될 때마다 빛의 세기가 감소한다는 조건에서 입사하는 빛의 세기의 반값에 비해 최종적으로 나오는 빛의 세기가 큰지 작은지를 판단하는 문제다. 수학적 계산 능력을 갖추고 있는 지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[2.1] 이동거리는 선분의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}$이므로 시간 $f(x)=\frac{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{v}$이다.

[2.2] 시간 $f(x)$가 최소가 되는 조건을 찾으면 된다. $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{v}\left(\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{2(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}\right)$$

이다. 그런데 $f'(0)<0$이고 $f'(b)>0$이므로 $f'(x)=0$일 때 $f(x)$는 최소이다. 따라서

$$\sin\theta_a=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{(b-x)}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}=\sin\theta_b$$

즉, $\theta_a=\theta_b$이다.

[2.3] n번 반사될 때 $\tan\theta=\dfrac{\frac{10}{2}}{\frac{100}{2n}}=\dfrac{n}{10}$이다.

16번 반사될 때 $\tan\theta=\dfrac{16}{10}=1.6$이므로 $\tan 60^o=\sqrt{3}=1.732$보다 작다. 하지만 18번 반사될 때는 $\tan\theta=\dfrac{18}{10}=1.8$이므로 1.732보다 크다. 따라서 최대 반사 횟수는 16번이다.

[2.4] 원래 빛 세기를 I_0라 하자.

1번 반사되면 $I_0(1-0.04)=0.96I_0$, 2번 반사되면 $0.96I_0(1-0.04)=0.96^2I_0$이고, n번 반사되면 0.96^nI_0가 된다. 최대 반사가 16번이 가능하므로 나오는 빛 세기는 $0.96^{16}I_0$이 된다.

이를 $0.5I_0$와 비교해 보면 된다.

$$16\log(0.96)=16\log(\log 3+5\log 2-2)=16(0.477+5\times 0.301-2)=-0.288$$

이고

$$\log(0.5)=-\log 2=-0.301$$

즉, $0.96^{16}>0.5$이 성립하므로, 원래 빛 세기의 반값보다 크다.

3. 출제근거

「함수의 극대와 극소」, 『미적분I』(고등학교 교과서), 좋은책 신사고, 2016, 116-123쪽.
「로그」, 『수학II』(고등학교 교과서), 미래엔, 2017, 168-184쪽.
「삼각함수의 뜻과 그래프」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 동아출판, 2016, 60-93쪽.
「여러 가지 미분법」, 『미적분II』(고등학교 교과서), 미래엔, 2016, 103-120쪽.
「평면운동」, 『기하와 벡터』(고등학교 교과서), 비상교육, 2016, 95-103쪽.

[문제 3]

1. 출제배경

고등학교 수학의 주요한 목표 중 하나는 확률과 통계의 개념을 이해하고 일상생활 속 다양한 문제를 해결하는데 응용하는 것이다. 이 문제는 우리 주위에서 흔하게 일어나는 일들을 확률과 통계의 개념을 이용하여 원하는 답을 얻어낼 수 있는지 묻는데 있다. 두 사람이 마일리지를 획득하는 게임을 할 때 경우의 수를 이해하고 있는지 확인하고 이에 따라 특정 사건의 확률과 기댓값을 계산할 수 있는지 확인하고자 한다.

각 세부 문항별 출제 의도는 다음과 같다.

[3.1] 주어진 조건에서 경우의 수를 구하고 이에 따라 특정 조건에서 특정 경우의 수에 대한 확률을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.2] 연속되는 시행에 대해 일반화된 형태의 확률을 구할 수 있는지 평가한다.
[3.3] 주어진 조건에서 확률변수의 개념을 도입하여 확률분포를 구할 수 있는지 평가한다.
[3.4] 확률분포를 구했을 때 기댓값을 계산할 수 있는지 평가한다.

2. 예시답안 및 해설

[3.1] 현재 두 사람이 만났을 때 다음 게임에서

$$\text{만날 확률은 } \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{1}{3},\ \text{만나지 못할 확률은 } 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

이다. 그리고 현재 두 사람이 만나지 못했을 때 다음 게임에서

$$\text{만날 확률은 } \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 = \frac{2}{9},\ \text{만나지 못하는 확률은 } 1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

이다.

[3.2] n번째 게임에서 처음으로 만날 확률은 $\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \times \frac{2}{9}$이다.

[3.3] 세 번의 게임 동안 한 사람이 획득하는 마일리지를 확률 변수 X라고 하자. 세 번의 게임 동안 만나는 횟수는 $0, 1, 2, 3$이며 이에 따른 확률 변수 X의 값은 $0, 9, 18, 27$이다.

(i) $P(X=0)=\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)=\frac{343}{729}$

(ii) $P(X=9)=\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{266}{729}$

(iii) $P(X=18)=\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{34}{243}$

(iv) $P(X=27)=\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{81}$

이때 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	9	18	27	계
$P(X=x)$	$\frac{343}{729}$	$\frac{266}{729}$	$\frac{34}{243}$	$\frac{2}{81}$	1

[3.4] 기댓값 $E(X)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(X) &= 9\times P(X=9)+18\times P(X=18)+27\times P(X=27) \\ &= 9\times\frac{266}{729}+18\times\frac{34}{243}+27\times\frac{2}{81}=\frac{524}{81} \end{aligned}$$

3. 출제근거

「조건부확률」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 동아출판, 2017, 120-131쪽.
「조건부확률」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), ㈜지학사, 2017, 81-90쪽.
「확률분포」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), 동아출판, 2017, 152-156쪽.
「확률분포」, 『확률과 통계』(고등학교 교과서), ㈜지학사, 2017, 102-112쪽.