문항카드 03. 논술전형 자연계열 수학 1번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 문제 1	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	집합, 조합, 확률분포, 이산확률변수의 평균
예상 소요 시간	15분 / 전체 90분	

2. 문항 및 자료

[문제 1] 앞면에는 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 처음에 이 10장의 카드는 모두 0이 보이도록 놓여 있다. 이 10장의 카드 중 임의로 서로 다른 5장의 카드를 택하여, 택한 카드들을 각각 한 번 뒤집은 후 10장의 카드에 보이는 모든 수의 집합을 A라
하고, 집합 A의 모든 원소의 합을 S라 하자. 이산확률변수 X를

$$X=\begin{cases} 3S & (3\in A\text{인 경우}) \\ S & (3\notin A\text{인 경우}) \end{cases}$$

라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. **[16점]**

3. 출제 의도

경우의 수를 이용하여 확률변수의 기댓값의 의미를 이해하고 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
관련 성취기준	**[수학] - (3) 수와 연산 - ① 집합** [10수학03-01] 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다. [10수학03-02] 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다. **[수학] - (5) 확률과 통계 - ② 순열과 조합** [10수학05-03] 조합의 의미를 이해하고, 조합의 수를 구할 수 있다. **[확률과 통계] - (3) 통계 - ① 확률분포** [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	174-179, 270-275
	수학	배종숙 외 6명	㈜금성출판사	2018	170-178, 272-275
	수학	박교식 외 19명	동아출판	2018	162-168, 264-270
	확률과 통계	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2019	37, 78-90
	확률과 통계	권오남 외 14명	㈜교학사	2019	80-95
	확률과 통계	배종숙 외 6명	㈜금성출판사	2019	92-103

5. 문항 해설

10장의 카드 중 임의로 서로 다른 5장의 카드를 택하는 방법의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_5 = 252$이다.

$3 \in A$인 집합 A의 개수는 ${}_9\mathrm{C}_4 = 126$이고, 이들 각각의 모든 원소의 합을 C_1, C_2, $\cdots$, C_{126}이라 하자.

$3 \notin A$인 집합 A의 개수는 ${}_9\mathrm{C}_5 = 126$이고, 이들 각각의 모든 원소의 합을 D_1, D_2, $\cdots$, D_{126}이라 하자.

이산확률변수 X가 $3C_1$, $3C_2$, $\cdots$, $3C_{126}$, D_1, D_2, $\cdots$, D_{126}의 각 값을 가질 확률은 각각 $\frac{1}{252}$

이다. 따라서, $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{126} 3C_n \times \frac{1}{252} + \sum_{n=1}^{126} D_n \times \frac{1}{252}$이다.

한편, C_1, C_2, $\cdots$, C_{126} 각각을 구할 때 더해진 0이 아닌 $126 \times 5 = 630$개의 수 중

3의 개수는 126, 3을 제외한 1부터 10까지 자연수의 개수는 각각 $\frac{630-126}{9} = 56$이므로

$$\sum_{n=1}^{126} C_n = 3 \times 126 + \left(\sum_{n=1}^{10} n - 3 \right) \times 56 = 3 \times 126 + 52 \times 56$$

같은 방법으로 D_1, D_2, $\cdots$, D_{126} 각각을 구할 때 더해진 0이 아닌 $126 \times 5 = 630$개의 수 중

3을 제외한 1부터 10까지 자연수의 개수는 각각 $\frac{630}{9} = 70$이므로

$$\sum_{n=1}^{126} D_n = \left(\sum_{n=1}^{10} n - 3 \right) \times 70 = 52 \times 70$$

따라서, $\mathrm{E}(X) = \frac{3 \times (3 \times 126 + 52 \times 56) + 52 \times 70}{252} = \frac{965}{18}$

<고교 검토교사>

A: 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구하는 문제로, 교육과정 내에서 출제되어 학생의 문제해결력을 평가할 수 있는 적절한 문항이다.

B: 각 확률변수에 대응하는 확률이 모두 같고 임의로 뽑은 전체 경우에서 각각의 자연수가 사용되는 개수는 같다는 아이디어를 활용하는 문제로, 교육과정 범위 내에서 출제되었다.

C: 집합 표현을 이해하고 규칙을 적용하여 확률변수를 이해하여 평균을 구하는 과정에 대한 채점 기준이 교육과정 내에 있고, 형식적 표현 또한 교육과정을 만족한다.

문항카드 04. 논술전형 자연계열 수학 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(자연) / 문제 2	
출제 범위	교육과정 과목명	확률과 통계, 미적분
	핵심개념 및 용어	이항정리, 시행, 이산확률변수, 기댓값, $\lim_{n\to\infty} a_n$, e
예상 소요 시간	18분 / 전체 90분	

2. 문항 및 자료

[문제 2] 앞면에는 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 n장의 카드를 사용하여 다음 시행을 한다.

> n장의 카드 중 임의로 1장의 카드를 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 이 n장의 카드는 모두 0이 보이도록 놓여 있을 때, 이 시행을 n번 반복한 후 n장의 카드에 보이는 모든 수의 합의 기댓값을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$의 값을 구하시오.

(단, 시행을 반복할 때 같은 카드가 여러 번 뒤집힐 수 있고, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$이다.) **[20점]**

3. 출제 의도

이항정리를 이용하여 이산확률변수의 기댓값을 구하고 이와 관련된 극한값을 극한의 성질을 이용하여 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
관련 성취기준	**[확률과 통계] - (1) 경우의 수 - 2 이항정리** [12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다. **[확률과 통계] - (2) 확률 - 1 확률의 뜻과 활용** [12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다. **[확률과 통계] - (3) 통계 - 1 확률분포** [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다. **[미적분] - (1) 수열의 극한 - 1 수열의 극한** [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

	[미적분] - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분
	[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	배종숙 외 6명	㈜금성출판사	2019	31-32, 49-52, 99-100
	확률과 통계	권오남 외 14명	㈜교학사	2019	28-30, 44-50, 89-90
	확률과 통계	고성은 외 5명	좋은책 신사고	2019	27-28, 43-47, 84-85
	미적분	홍성복 외 10명	지학사	2019	16-19, 54
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	16-18, 53
	미적분	류희찬 외 9명	천재교과서	2019	18-20, 57-58

5. 문항 해설

어떤 자연수 $a\,(1 \le a \le n)$에 대하여 n번의 시행 후 자연수 a가 보이게 뒤집어져 있을 확률을 $\mathrm{P}(a)$라 하면

$$\mathrm{P}(a) = {}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{n}\right)^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-3} + {}_n\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{n}\right)^5\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-5} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{n}\right)^m\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-m}$$

(단, m은 n 이하의 자연수 중 최대인 홀수)

이고, 이항정리에 의하여

$$\mathrm{P}(a) = \frac{\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}}{2}$$

한편, $\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)^n = 1$이고

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\left(-\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \left(-\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$ 이므로

$$\mathrm{P}(a) = \frac{1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{2}$$

따라서

$$a_n = \sum_{a=1}^{n}\left\{a \times \frac{1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{2}\right\} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n(n+1)}{2n^2} \times \frac{1-\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}{2}\right\} = \frac{e^2-1}{4e^2}$$

<고교 검토교사>

A: 이항정리를 이용하여 주어진 이산확률변수에 대응하는 확률을 구하고, 주어진 이산확률변수의 기댓값을 수열로 나타낸 다음 수열의 극한을 이용하여 극한값을 구하는 문제로, 교육과정 내에서 출제되었으면서도 참신해서 응시한 학생들의 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항이다. 예

시 답안 또한 교육과정을 충실하게 이수한 학생들은 모두 이해할 수 있는 수준으로 작성되었다.

B: [문제 1]과 동일하게 이산확률변수의 기댓값을 묻고 있으나, 대응하는 확률을 구하는 과정 및 시행 과정을 차별화하고 수열의 극한을 구하는 과정이 추가되어 [문제 1]과는 다른 요소들을 평가할 수 있는 참신한 문항이다. 교육과정 내에서 문항이 출제되었으며 예시 답안 또한 교육과정을 준수하여 작성되었다.

C: 참신한 부분들이 있지만, 해당 부분들은 선행학습 및 사교육을 통한 준비 여부가 해결 여부에 영향을 끼치지 않는다고 판단된다. 교육과정에서 배우는 내용을 충실하게 이수했으며 사고력이 우수한 학생들은 충분히 해결할 수 있도록 설계된 문항이다. 예시 답안 또한 교육과정을 충실히 이수한 사람이면 충분히 이해하고 해결 과정을 떠올릴 수 있는 수준으로 작성되었다.

문항카드 05. 논술전형 자연계열 수학 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(자연) / 문제 3-1, 3-2	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	판별식, 미분계수, 정적분, 이계도함수
예상 소요 시간	12분 / 전체 90분	

2. 문항 및 자료

[문제 3]

7개의 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$, $g_1(x)=ax+b$, $g_2(x)=ax+c$, $g_3(x)=bx+a$, $g_4(x)=bx+c$, $g_5(x)=cx+a$, $g_6(x)=cx+b$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 세 실수 a, b, c에 대하여 아래의 물음에 답하시오.

(Ⅰ) $f(x)>0$인 실수 x가 존재한다.

(Ⅱ) $1\le i\le 6$인 모든 자연수 i와 $s<t$인 모든 실수 s, t에 대하여

$\int_s^t g_i(x)dx \le \int_s^t f(x)dx$가 성립한다.

[문제 3-1] $\dfrac{2f'(26)}{f''(26)}$의 값을 구하시오. **[7점]**

[문제 3-2] $b=26$인 모든 $f(-1)$의 값의 범위는 $\alpha \le f(-1) \le \beta$이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. **[7점]**

3. 출제 의도

정적분으로 나타낸 부등식을 이해하고 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 판별식을 이용하여 판단할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-1] 정적분으로 나타낸 부등식을 이해하고 함수의 대소관계를 비교하여 이차함수의 계수들의 관계를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3-2] 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고 판별식을 이용하여 상수항의 범위를 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
관련 성취기준	**[수학] - (1) 문자와 식 - 4 복소수와 이차방정식** [10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - 1 미분계수** [12수학II02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - 2 도함수** [12수학II02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다. **[수학 II] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용** [12수학II02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. **[수학 II] - (3) 적분 - 2 정적분** [12수학II03-03] 정적분의 뜻을 안다. **[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법** [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외 6명	㈜금성출판사	2018	67-73, 102
	수학	박교식 외 19명	동아출판	2018	59-63, 87
	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	69-74, 97
	수학 II	김원경 외 14명	비상교육	2018	53-54, 59-64, 78-81, 112-121
	수학 II	고성은 외 6명	좋은책 신사고	2018	55-58, 61-66, 80-82, 119-131
	수학 II	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	54-56, 60-66, 78-80, 122-129
	미적분	홍성복 외 10명	지학사	2019	104-105
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	94-95
	미적분	류희찬 외 9명	천재교과서	2019	120-121

5. 문항 해설

[문제 3-1]

조건 (II)에서, $s<t$ 인 모든 실수 s, t 에 대하여 $\int_s^t \{f(x)-g_i(x)\}dx \geq 0$ 이 성립하므로

$\int_0^3 \{f(x)-g_4(x)\}dx = a\int_0^3 x^2\,dx = 9a \geq 0$ 에서 $a \geq 0$ 이다. ……㉠

(i) $a=0$ 인 경우

$\int_0^2 \{f(x)-g_2(x)\}dx = b\int_0^2 x\,dx = 2b \geq 0$, $\int_{-2}^0 \{f(x)-g_2(x)\}dx = b\int_{-2}^0 x\,dx = -2b \geq 0$ 이므로 $b=0$ 이다.

$\int_{-1}^1 \{f(x)-g_5(x)\}dx = c\int_{-1}^1 (1-x)dx = 2c \geq 0$,

$\int_1^3 \{f(x)-g_5(x)\}dx = c\int_1^3 (1-x)dx = -2c \geq 0$ 이므로 $a=b=c=0$ 이 되어 조건 (I)을 만족시키지 못한다.

(ii) $a>0$ 인 경우

$m=\dfrac{b-a}{2a}$ 라 하면 $f(x)-g_2(x) = ax^2+(b-a)x = a(x^2+2mx) = a\{(x+m)^2-m^2\}$ 이다.

$m \neq 0$ 이면, $\int_{-m-|m|}^{-m+|m|} \{f(x)-g_2(x)\}\,dx = a\int_{-m-|m|}^{-m+|m|} \{(x+m)^2-m^2\}\,dx = -\frac{4}{3}a|m|^3 \geq 0$

이므로 $|m| < 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $m = 0$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a > 0$, $a = b$ 이므로

$f(x) = ax^2 + ax + c$, $f'(x) = 2ax + a$, $f''(x) = 2a$

$\frac{2f'(26)}{f''(26)} = \frac{2\times(52a+a)}{2a} = 53$

[문제 3-2]

$b = 26$ 이면 **[문제 3-1]**에서 $f(x) = 26x^2 + 26x + c$,

$g_1(x) = g_3(x) = 26x + 26$, $g_2(x) = g_4(x) = 26x + c$, $g_5(x) = g_6(x) = cx + 26$ ……㉠

이다.

이차방정식 $f(x) - g_5(x) = 0$ 의 판별식을 D라 하자.

(ⅰ) $D > 0$ 인 경우

이차방정식 $f(x) - g_5(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근을 p, $q\,(p < q)$라 하면

$\int_p^q \{f(x)-g_5(x)\}dx = -\frac{13(q-p)^3}{3} < 0$

이므로 조건 (Ⅱ)을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $D \leq 0$ 인 경우

$D = (26-c)^2 + 4\times 26\times(26-c) = (c-26)(c-130) \leq 0$

이므로 $26 \leq c \leq 130$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x) - g_5(x) \geq 0$ 을 만족시키는 모든 c 의 범위는 $26 \leq c \leq 130$이다.

이 때 $f(x) - g_1(x) \geq 0$, $f(x) - g_2(x) \geq 0$, $f(x) - g_5(x) \geq 0$ 이 되므로 ㉠에 의하여

$1 \leq i \leq 6$ 인 모든 자연수 i 에 대하여 $f(x) - g_i(x) \geq 0$ 이다.

또한 $1 \leq i \leq 6$ 인 모든 자연수 i 와 모든 실수 s 에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_s^x \{f(t)-g_i(t)\}dt \geq 0$ 이 되어

함수 $\int_s^x \{f(t)-g_i(t)\}dt$ 는 증가함수이고 $\int_s^s \{f(x)-g_i(x)\}dx = 0$ 이므로

$s < t$ 인 모든 실수 s, t 에 대하여 $\int_s^t \{f(x)-g_i(x)\}dx \geq 0$ 이 되어 조건 (Ⅱ)를 만족시킨다.

따라서 $26 \leq c \leq 130$이고 $f(-1) = c$ 이므로 $26 \leq f(-1) \leq 130$

$\alpha = 26$, $\beta = 130$ 이므로 $\alpha + \beta = 156$

<고교 검토교사>

A: 정적분으로 나타낸 부등식을 이해하고, 이차부등식이 항상 성립할 조건을 이용하여 $f(x)$를 결정한 다음 도함수 및 이계도함수를 이용해 값을 구하는 문제로, 교육과정 내에서 출제되었으면서도 참신해서 응시한 학생들의 문제해결력을 평가하기에 적절한 문항이다. 예시 답안 또한 교육과정을 충실하게 이수한 학생들은 모두 이해할 수 있는 수준으로 작성되었다.

B: 결과적으로는 교과서 수준의 문제들을 풀 수 있으면 해결할 수 있는 문항이나, 주어진 함수가 많아서 그들 중 조건을 간단하게 유도할 수 있는 적절한 함수를 선택해서 진행해야 간결하게 해결

할 수 있는 참신한 문항이다. 교육과정 내에서 문항이 출제되었으며 예시 답안 또한 교육과정을 준수하여 작성되었다.

C: 참신한 부분들이 있지만, 해당 부분들은 선행학습 및 사교육을 통한 준비 여부가 해결 여부에 영향을 끼치지 않는다고 판단된다. 교육과정에서 배우는 내용을 충실하게 이수했으며 사고력이 우수한 학생들은 충분히 해결할 수 있도록 설계된 문항이다. 예시 답안 또한 교육과정을 충실히 이수한 사람이면 충분히 이해하고 해결 과정을 떠올릴 수 있는 수준으로 작성되었다.

문항카드 06. 논술전형 자연계열 수학 4번

1. 일반 정보

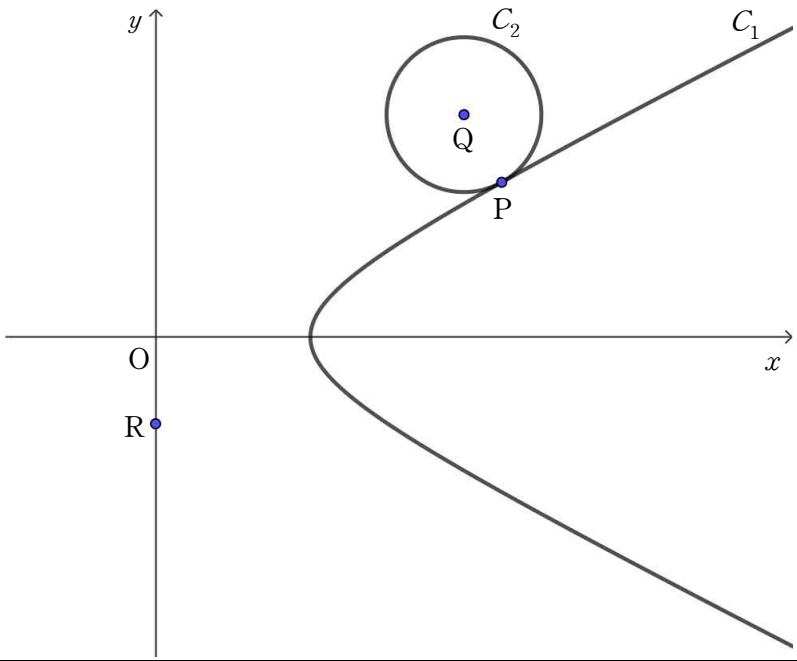
유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 문제 4-1, 4-2	
출제 범위	교육과정 과목명	수학, 기하, 미적분
	핵심개념 및 용어	쌍곡선, 매개변수, 함수의 몫의 미분법, 점과 직선 사이의 거리,
예상 소요 시간	27분 / 전체 90분	

2. 문항 및 자료

[문제 4] 곡선 $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1\,(x>0)$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 P를 지나고 반지름의 길이가 1인 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심이 Q이고 C_2 위의 점 P에서의 접선이 곡선 C_1 위의 점 P에서의 접선과 일치할 때, 아래의 물음에 답하시오. (단, 점 Q의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 작다.)

[문제 4-1] 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(t)$, $g(t)$에 대하여 점 P의 좌표가 $(f(t), g(t))$이고 $g(0)=0$, $g'(0)=2026$일 때, 점 Q의 좌표를 $(\alpha(t), \beta(t))$라 하자. $\beta'(0)$의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제 4-2] 점 $\mathrm{R}\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$가 있다. 모든 직선 QR의 기울기의 집합을 구하시오. **[20점]**



3. 출제 의도

쌍곡선의 뜻을 알고 쌍곡선의 접선의 방정식을 이해하여 조건에 맞는 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

[문제 4-1] 쌍곡선의 접선과 수직인 직선의 기울기를 이용하여 점 Q의 위치를 표현하고 그 점의 속도를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 4-2] 쌍곡선의 접선의 방정식과 관련된 기하적 관계를 이해하여 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] "수학과 교육과정"
관련 성취기준	**[수학] - (2)기하 - ② 직선의 방정식** [10수학02-05] 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다. **[기하] - (1) 이차곡선 - ① 이차곡선** [12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외 19명	동아출판	2018	122-124
	수학	배종숙 외 6명	㈜금성출판사	2018	135-137
	수학	황선욱 외 8명	미래엔	2018	132-134
	기하	류희찬 외 9명	천재교과서	2019	27-32
	기하	이준열 외 7명	천재교육	2019	26-31
	기하	황선욱 외 8명	미래엔	2019	42-47
	미적분	홍성복 외 10명	지학사	2019	81-83, 95-97
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	77-78, 91-93
	미적분	류희찬 외 9명	천재교과서	2019	96-97, 108-110

5. 문항 해설

[문제 4-1]

어떤 양수 t에 대하여 곡선 C_1 위의 점 $(f(t), g(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{f(t)}{4g(t)}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이므로

$$(\mathrm{Q}\text{의 } x\text{좌표})-(\mathrm{P}\text{의 } x\text{좌표})=\frac{-f(t)}{\sqrt{\{f(t)\}^2+16\{g(t)\}^2}}$$

$$(\mathrm{Q}\text{의 } y\text{좌표})-(\mathrm{P}\text{의 } y\text{좌표})=\frac{4g(t)}{\sqrt{\{f(t)\}^2+16\{g(t)\}^2}}$$

$$\mathrm{Q}\left(f(t)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\{f(t)\}^2+16\{g(t)\}^2}}\right),\ g(t)\left(1+\frac{4}{\sqrt{\{f(t)\}^2+16\{g(t)\}^2}}\right)\right)$$

즉, $\alpha(t)=f(t)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\{f(t)\}^2+16\{g(t)\}^2}}\right)$, $\beta(t)=g(t)\left(1+\frac{4}{\sqrt{\{f(t)\}^2+16\{g(t)\}^2}}\right)$ ……㉠

점 P는 곡선 C_1 위의 점이므로

$\frac{\{f(t)\}^2}{4}-\{g(t)\}^2=1$ ……㉡

㉡의 양변을 t로 미분하면

$\frac{f(t)f'(t)}{2}-2g(t)g'(t)=0$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$\beta'(t)=g'(t)\left(1+\frac{4\{f(t)\}^2-16\{g(t)\}^2}{\left(\sqrt{\{f(t)\}^2+16\{g(t)\}^2}\right)^3}\right)$

이고, $g(0)=0$, $g'(0)=2026$이므로 $f(0)=2$

따라서 $\beta'(0)=6078$

[문제 4-2]

직선 QR의 기울기를 m이라 하자.

점 P가 곡선 C_1 위를 움직이므로 모든 m의 값의 집합은 하나의 구간을 이룬다.

m의 최댓값을 b라 하면 b는 양수이고, 기울기가 b인 곡선 C_1의 접선을 l_1이라 할 때

$l_1:\ y=bx-\sqrt{4b^2-1}\ \left(b^2>\frac{1}{4}\right)$

이때, 점 $\mathrm{R}\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$와 직선 l_1 사이의 거리는 1이므로

$\frac{\left|\frac{\sqrt{5}}{2}-\sqrt{4b^2-1}\right|}{\sqrt{b^2+1}}=1$

$b^2>\frac{1}{4}$이므로 $b^2=\frac{89}{36}$, $b=\frac{\sqrt{89}}{6}$

곡선 C_1 위에 있는 제4사분면 위의 임의의 점 P에 대하여, 직선 OP의 기울기는 $-\frac{1}{2}$보다 크다.

점 R과 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 사이의 거리는 1이므로 점 R을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선을 l_2라 하면

점 P와 직선 l_2 사이의 거리는 1보다 크므로 직선 QR의 기울기는 $-\frac{1}{2}$보다 크다.

한편, $-\frac{1}{2}$보다 큰 임의의 음수 k에 대하여 점 R을 지나고 기울기가 k인 직선을 l_3이라 하면

l_3은 직선 $y=-\frac{1}{2}x$와 만난다. 이 점을 T라 하면, 선분 RT위의 점 중 원 C_2의 중심이 되는 점이 존재하므로, k는 모든 직선 QR의 기울기의 집합의 원소이다.

따라서 모든 직선 QR의 기울기의 집합은 $\left\{m\ \middle|\ -\frac{1}{2}<m\le\frac{\sqrt{89}}{6},\ m\text{은 실수}\right\}$이다.

<고교 검토교사>

A: 매개변수, 쌍곡선, 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수와 조건을 만족하는 기울기의 범위를 구하는 문제로, 교육과정 내에서 출제되어 학생의 사고력과 문제 해결력을 평가할 수 있는 적절한 문항이다.

B: [문제 4-1]은 쌍곡선과 접선을 공통으로 갖는 원의 중심의 위치를 파악하여 식을 연립하고 미분계수를 구하면 해결할 수 있는 문제이고, [문제 4-2]는 쌍곡선과 그 점근선의 기하학적 특징을 파악하여 직선의 기울기의 범위를 구하는 문제로, 두 하위 문항 모두 교육과정 내에서 출제되었다.

C: [문제 4-1]은 제시된 조건을 식으로 나타내고 미분과 식의 연립을 통하여 도함수를 정확히 구하는 것이 핵심인 문제이고, [문제 4-2]는 제시된 직선의 특징을 이용하여 그 기울기가 최댓값을 가질 때의 조건을 파악하는 것이 중요한 문제로, 수학과 교육과정의 성취 기준에 도달한 학생이면 해결할 수 있는 문제이다.

문항카드 07. 논술전형 자연계열 수학 5번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(수학) / 문제 5-1, 5-2	
출제 범위	교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분
	핵심개념 및 용어	사잇값 정리, 몫의 미분법, 함수의 최대와 최소
예상 소요 시간	18분 / 전체 90분	

2. 문항 및 자료

[문제 5] 아래의 물음에 답하시오. (단, $e > 2$ 이다.)

[문제 5-1] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{(e^x+x)(1-xe^x)}{(e^{2x}+1)(x^2+1)}$ 의 최솟값을 구하시오. **[11점]**

[문제 5-2] 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{(2e^x+\cos x)(2-e^x\cos x)}{(e^{2x}+1)(\cos^2 x+4)}$ 의 최댓값을 구하시오. **[9점]**

3. 출제 의도

복잡한 함수를 치환을 이용하여 간단히 정리하고 사잇값 정리와 미분을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[문제 5-1] 사잇값 정리와 미분을 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다.
[문제 5-2] 사잇값 정리와 미분을 이용하여 함수의 최댓값을 구할 수 있는지 평가한다.

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제 2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”
관련 성취기준	**[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - ② 함수의 연속** [12수학Ⅱ01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. **[수학Ⅱ] - (2) 미분 - ③ 도함수의 활용** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12수학Ⅱ02-10] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다. **[미적분] - (2) 미분법 - ② 여러 가지 미분법** [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.

	[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용 [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. [12미적02-13] 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	고성은 외 6명	좋은책 신사고	2018	35-43, 80-96
	수학II	류희찬 외 10명	천재교과서	2018	34-45, 78-97
	수학II	김원경 외 14명	비상교육	2018	35-42, 78-92
	미적분	박교식 외 19명	동아출판	2019	53, 76-80, 104-111
	미적분	홍성복 외 10명	지학사	2019	54, 80-87, 114-124
	미적분	류희찬 외 9명	천재교과서	2019	57, 96-102, 128-138

5. 문항 해설

[문제 5-1]

$(e^x+x)(1-xe^x)\neq 0$ 인 경우

$(e^{2x}+1)(x^2+1)=x^2e^{2x}+e^{2x}+x^2+1=(e^x+x)^2+(1-xe^x)^2>0$ 이고

$(e^x+x)(1-xe^x)=0$ 인 경우 $f(x)=0$ 이므로,

함수 $f(x)$ 는 $(e^x+x)(1-xe^x)<0$ 일 때 최솟값을 갖는다. 이때

$-\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{e^x+x}{xe^x-1}+\dfrac{xe^x-1}{e^x+x}$ 이고, $\dfrac{e^x+x}{xe^x-1}>0$ 이다.

한편, $h(x)=\dfrac{e^x+x}{xe^x-1}$, $p(t)=t+\dfrac{1}{t}$ $(t>0)$ 이라 하면 $-\dfrac{1}{f(x)}=p(h(x))$

$p'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}$ 이므로 함수 $p(t)$ 는 구간 $(0,\infty)$ 에서 $t=1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서, $h(\alpha)=1$ 인 실수 α 가 존재한다면 함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 에서 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$ 을 갖는다.

한편, 방정식 $h(x)=1$ 에서 $\dfrac{e^x+x}{xe^x-1}=1$, $xe^x-e^x-x-1=0$ 이므로

$q(x)=xe^x-e^x-x-1$ 이라 하면 $q(x)$ 는 연속함수이고 $q(1)=-2<0$, $q(2)=e^2-3>0$ 이므로

사잇값 정리에 의하여 $q(\alpha)=0$, 즉 $h(\alpha)=-1$ 인 α 가 열린구간 $(1,2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $x=\alpha$ 일 때 $f(x)$ 는 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$ 을 갖는다.

[문제 5-2]

$(2e^x+\cos x)(2-e^x\cos x)\neq 0$ 인 경우

$(e^{2x}+1)(\cos^2 x+4)=e^{2x}\cos^2 x+4e^{2x}+\cos^2 x+4=(2e^x+\cos x)^2+(2-e^x\cos x)^2>0$ 이고

$(2e^x+\cos x)(2-e^x\cos x)=0$ 인 경우 $f(x)=0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 $(2e^x+\cos x)(2-e^x\cos x)>0$ 일 때 최댓값을 갖는다. 이때

$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{2e^x+\cos x}{2-e^x\cos x}+\dfrac{2-e^x\cos x}{2e^x+\cos x}$ 이고 $\dfrac{2e^x+\cos x}{2-e^x\cos x}>0$ 이다.

한편, $h(x)=\dfrac{2e^x+\cos x}{2-e^x\cos x}$, $p(t)=t+\dfrac{1}{t}\ (t>0)$이라 하면 $\dfrac{1}{f(x)}=p(h(x))$

$p'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}$이므로 함수 $p(t)$는 구간 $(0,\infty)$에서 $t=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서, $h(\alpha)=1$인 실수 α가 존재한다면 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최댓값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

한편, 방정식 $h(x)=1$에서 $\dfrac{2e^x+\cos x}{2-e^x\cos x}=1$, $e^x\cos x+2e^x+\cos x-2=0$이므로

$q(x)=e^x\cos x+2e^x+\cos x-2$라 하면 $q(x)$는 연속함수이고

$q(0)=2>0$, $q\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=2e^{-\frac{\pi}{2}}-2=2\left(e^{-\frac{\pi}{2}}-e^0\right)<0$이므로,

사잇값 정리에 의하여 $q(\alpha)=0$, 즉 $h(\alpha)=1$인 α가 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $x=\alpha$일 때 $f(x)$는 최댓값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

<고교 검토교사>

A: 식 변형과 미분을 통해 주어진 함수의 최댓값, 최솟값을 구할 수 있는 문제로, 학생의 문제해결 능력과 창의적 사고를 평가할 수 있는 적절한 문항이다.

B: 최대(최소)가 되는 값의 존재성을 사잇값 정리를 활용하여 판별하는 문제로, 교육과정 범위 내에서 출제되었다.

C: 식을 이루는 항들의 곱이 같다는 것에서 식의 형태 변형 아이디어를 떠올릴 수 있는 문제로, 채점 기준이 교육과정 내에 있고, 형식적 표현 또한 교육과정을 만족한다.