수시모집 논술시험(추가시험) 자연계열 및 해설

1 출제의도

가. 문제 1번

고등학교 과목의 수학, 확률과 통계 및 미적분 과목에서 문제를 출제하였다. 규칙성을 이용해 주어진 확률값을 정확하게 계산하여 기댓값을 계산하는 과정을 통해 창의력과 논리적 사고력을 평가한다.

문제 1-1

여러 수학적 방법을 이용하여 확률변수의 기댓값을 구하는 문제이다.

문제 1-2

약수와 배수, 확률 등을 이용하여 확률변수의 기댓값을 구하는 문제이다.

나. 문제 2번

수학Ⅱ, 기하, 미적분 과목에서 출제하였다. 주어진 곡선의 접선의 방정식을 구하고 이를 통해 최댓값 최솟값을 미적분을 이용하여 계산하는 능력을 평가한다.

문제 2-1

접선의 방정식을 구하고 이를 통해 식의 최댓값을 구하는 문제이다.

문제 2-2

미분법을 이용하여 최솟값을 갖는 의 값을 구하는 문제이다.

다. 문제 3번

수학Ⅱ, 기하, 미적분 과목에서 출제하였다. 좌표평면에서 위치벡터와 평면벡터의 내적을 이용하여 벡터와 관련된 문제를 미적분을 이용하여 해결할 수 있는지 평가한다.

문제 3-1

위치벡터와 평면벡터의 내적을 이용하여 정적분을 구하는 문제이다.

문제 3-2

위치벡터와 평면벡터의 내적을 이용하여 내적의 최댓값을 구하는 문제이다.

문제 3-3

위치벡터와 평면벡터의 내적을 이용하여 부등식을 증명하는 문제이다.

2 문항 해설

문제 1-1

$$\int_1^e \{m-n(\ln x)^2\}dx = m(e-1)-n\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$= m(e-1)-n\left[x(\ln x)^2\right]_1^e + 2n\int_1^e \ln x\, dx$$

$$= m(e-1)-n(e-2)$$

이고, 30 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수가 $30\times 29 = 870$이므로 $\mathrm{E}(X)$는

두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)에 대응하는 $m(e-1)-n(e-2)$의 값을 모두 더한 뒤 870으로 나눈 값과 같다.

따라서 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{870}\left\{(e-1)\sum_{k=1}^{30} 29k-(e-2)\sum_{k=1}^{30} 29k\right\} = \frac{1}{870}\times\sum_{k=1}^{30} 29k = \frac{31}{2}$

(30 이하의 두 자연수 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 870이고, m과 n이 취할 수 있는 값은 30 이하의 자연수 30개이므로 m의 자리에 30 이하의 각 자연수는 $870\div 30 = 29$번씩 사용되었고, n 또한 마찬가지이다.)

문제 1-2

m과 n은 서로 다른 30 이하의 자연수이므로 $\frac{30!}{mn}$은 자연수이다. $\frac{30!}{mn}$을 소인수분해하면

$\frac{30!}{mn} = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$(단, k는 자연수이고, k 이하의 자연수 i에 대하여 p_i는 소수이며, i와 다른 k 이하의 자연수 j에 대하여 $p_i \neq p_j$이고 a_i는 자연수)라 하자.

자연수 순서쌍들로 이루어진 두 집합 A, B를 각각

$A = \{(x, y, z) \mid x > y > z$이고 $xyz = \frac{30!}{mn}$이며 x와 y, y와 z, z와 x는 각각 서로소$\}$

$B = \{(x, y, z) \mid xyz = \frac{30!}{mn}$이며 x와 y, y와 z, z와 x는 각각 서로소$\}$ 라 하면

$(x, y, z)\in B$이고 p_i가 x의 약수인 경우, x와 y, z와 x는 각각 서로소이므로 p_i는 나머지 두 수 y, z의 약수가

될 수 없으므로 $p_i^{a_i}$는 x의 약수가 된다.

따라서 k 이하의 각 자연수 i에 대하여 $p_i^{a_i}$는 세 수 x, y, z 중 단 하나의 수의 약수가 되므로 $n(B) = 3^k$이다.

한편, $B' = B-\left\{\left(1, 1, \frac{30!}{mn}\right), \left(1, \frac{30!}{mn}, 1\right), \left(\frac{30!}{mn}, 1, 1\right)\right\}$이라 하면 $(a, b, c)\in B'$일 때

$a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$이고 집합 A의 각 원소 (x, y, z)에 대하여 세 수 x, y, z를 일렬로 나열하는 경우의 수는 3!이므로

$n(A) = \frac{n(B')}{3!} = \frac{n(B)-3}{6} = \frac{3^k-3}{6}$ (단, k는 $\frac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수)……(*)

30!을 소인수분해하면

$30!=2^{26}\times3^{14}\times5^{7}\times7^{4}\times11^{2}\times13^{2}\times17\times19\times23\times29$이므로

30!의 서로 다른 소인수의 개수는 10개다. 따라서 위의 (*)에 의하여

① $\frac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수가 8개일 확률은 $\frac{4\times3}{30\times29}=\frac{6}{435}$

② $\frac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수가 9개일 확률은 $\frac{2\times4\times26+2\times2}{30\times29}=\frac{106}{435}$

③ $\frac{30!}{mn}$의 서로 다른 소인수의 개수가 10개일 확률은 $1-\frac{6}{435}-\frac{106}{435}=\frac{323}{435}$

①, ②, ③에 의하여 $\mathrm{P}\left(Y=\frac{3^8-3}{6}\right)=\frac{6}{435}$, $\mathrm{P}\left(Y=\frac{3^9-3}{6}\right)=\frac{106}{435}$, $\mathrm{P}\left(Y=\frac{3^{10}-3}{6}\right)=\frac{323}{435}$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{2Y+1}{3^7}=1\right)=\frac{6}{435}$, $\mathrm{P}\left(\frac{2Y+1}{3^7}=3\right)=\frac{106}{435}$, $\mathrm{P}\left(\frac{2Y+1}{3^7}=3^2\right)=\frac{323}{435}$

따라서 $\mathrm{E}\left(\frac{2Y+1}{2187}\right)=\frac{1\times6+3\times106+3^2\times323}{435}=\frac{3231}{435}=\frac{1077}{145}$

문제 2-1

P를 $\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선은 $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$이며

점 A의 x좌표는 $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\alpha$, 점 B의 y좌표는 $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$이다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 $X=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $Y=-\alpha f'(\alpha)$이며 $XY=\alpha f(\alpha)$이다.

$f(x)=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$이므로 $F(x)=xf(x)=x\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ 라 하면

$F'(x)=\frac{b}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{2x^2}{a^2}\right)$

따라서 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$일 때, $F'(x)=0$이고 이때 $F(x)$가 최댓값을 갖는다.

따라서 XY는 최댓값 $F\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{ab}{2}$를 갖는다.

문제 2-2

$\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$라 하면 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$에서의 접선은 $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$이며

점 A의 x좌표는 $-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\alpha$, 점 B의 y좌표는 $-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha)$이다.

따라서 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$에서 $X=-\dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $Y=-\alpha f'(\alpha)$이고

$XY=\alpha f(\alpha)$는 α의 값과 무관하게 상수 c가 되는데, $XY=1\times f(1)=3$이므로 $c=3$이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{3}{x}\ (x>0)$

$h(x)=\{f(x)\}^2+\dfrac{1}{f(x)}$로 놓으면, $h(x)=\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{x}{3}$, $h'(x)=\dfrac{x^3-54}{3x^3}$이고,

$h(x)$는 $x=\sqrt[3]{54}$에서 최솟값을 가지므로 $k=\sqrt[3]{54}$이다.

문제 3-1

$\overrightarrow{OP}=(t,\ 4-2t)$, $\overrightarrow{OP'}=(1,\ -2)$

$a=2$이므로 조건 (Ⅰ)에서 $\overrightarrow{PQ}=-2\overrightarrow{OP}=(-2t,\ 4t-8)$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{PR}=\alpha(2,\ 1)$ (α는 실수)이므로 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-8\alpha>0$이므로 $\alpha<0$이다.

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|$이므로 $2\sqrt{5t^2-16t+16}=-\alpha\sqrt{5}$에서 $\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\sqrt{5t^2-16t+16}$

조건 (Ⅲ)에서 $\overrightarrow{PS}=-5\overrightarrow{PR}=-5\alpha(2,\ 1)$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS}=-20\alpha$, $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2=320(5t^2-16t+16)$이므로

$\displaystyle\int_0^2(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2\,dt=320\int_0^2(5t^2-16t+16)\,dt=\frac{12800}{3}$이다.

문제 3-2

$\overrightarrow{OP}=(2\cos t,\ \sin t)$, $\overrightarrow{OP'}=(-2\sin t,\ \cos t)$, $\overrightarrow{OT}=(0,\ 1)$

$a=5$이므로 조건 (Ⅰ)에서 $\overrightarrow{PQ}=-5\overrightarrow{OP}=(-10\cos t,\ -5\sin t)$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{PR}=\alpha(\cos t,\ 2\sin t)$ (α는 실수)이므로 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-10\alpha>0$이므로 $\alpha<0$이다.

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|$이므로 $5\sqrt{4\cos^2t+\sin^2t}=-\alpha\sqrt{\cos^2t+4\sin^2t}$에서 $\alpha=-5\sqrt{\dfrac{4-3\sin^2t}{1+3\sin^2t}}$

따라서 $\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR}=\alpha(0,\ 1)\cdot(\cos t,\ 2\sin t)=2\alpha\sin t$, $(\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR})^2=4\alpha^2\sin^2t=100\times\dfrac{4\sin^2t-3\sin^4t}{1+3\sin^2t}$

$\sin^2t=s\ (0\le s\le 1)$, $h(s)=\dfrac{4s-3s^2}{1+3s}$이라 하면 $h'(s)=-\dfrac{9s^2+6s-4}{(3s+1)^2}$이므로

$h(s)$는 $s=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{3}$에서 최댓값을 갖고, $h\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{3}\right)=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{3}=\dfrac{6-2\sqrt{5}}{3}$이다.

따라서 $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $(\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR})^2$의 최댓값은 $\dfrac{200}{3}(3-\sqrt{5})$이다.

문제 3-3

$\overrightarrow{OP}=(f(t),\ g(t)),\ \overrightarrow{OP'}=(f'(t),\ g'(t))$이고 $g(t)=\dfrac{1}{f(t)},\ g'(t)=-\dfrac{f'(t)}{\{f(t)\}^2}$

$a>2$이므로 조건 (Ⅰ)에서 $\overrightarrow{PQ}=-a\overrightarrow{OP}=(-af(t),\ -ag(t))$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{PR}=\alpha(g'(t),\ -f'(t))$ (α는 실수)

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=a\alpha\{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)\}=2a\alpha\dfrac{f'(t)}{f(t)}>0$이므로 $\alpha>0$

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|$이므로 $a\sqrt{\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2}=\alpha\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$에서

$$\alpha=a\sqrt{\frac{\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2}{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}}=a\sqrt{\frac{\{f(t)\}^2\left(1+\dfrac{1}{\{f(t)\}^4}\right)}{\{f'(t)\}^2\left(1+\dfrac{1}{\{f(t)\}^4}\right)}}=a\frac{f(t)}{f'(t)}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}&=\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR})\\&=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PR}\\&=|\overrightarrow{OP}|^2+\alpha\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}\\&=\{f(t)\}^2+\frac{1}{\{f(t)\}^2}-2\alpha\frac{f'(t)}{f(t)}\\&=\{f(t)\}^2+\frac{1}{\{f(t)\}^2}-2a\\&>\{f(t)\}^2-2a\ >a^2-2a>0\quad(\because\ f(t)>a>2)\end{aligned}$$

이므로 모든 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}>0$이다.