# 2025학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

| 모집단위 | | 수험번호 | | 성명 | |
|---|---|---|---|---|---|

**[문제 1]** 1부터 30까지의 자연수가 하나씩 적힌 30장의 카드가 들어 있는 주머니가 하나 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후, 꺼낸 카드를 넣지 않고 주머니에서 다시 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한다. 첫 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 $m$, 두 번째로 꺼낸 카드에 적힌 수를 $n$이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

**[문제 1-1]** 확률변수 $X=\int_1^e \{m-n(\ln x)^2\}dx$에 대하여 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. **[10점]**

**[문제 1-2]** 다음 조건을 만족시키는 자연수 $x$, $y$, $z$의 모든 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수를 확률변수 $Y$라 할 때, $\mathrm{E}\left(\frac{2Y+1}{3^7}\right)$의 값을 구하시오. **[20점]**

(Ⅰ) $xyz=\frac{30!}{mn}$
(Ⅱ) $x>y>z$
(Ⅲ) $x$와 $y$, $y$와 $z$, $z$와 $x$는 각각 서로소이다.

**[문제 2]** 아래의 **[문제 2-1]**, **[문제 2-2]**에서 주어진 함수 $f(x)$는 정의역에 속하는 모든 실수 $x$에 대하여 미분가능하고 $f'(x)\neq 0$이다. 이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Q의 $x$좌표, $y$좌표를 각각 $X$, $Y$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, O는 원점이다.)

**[문제 2-1]** 두 양수 $a$, $b$에 대하여 $f(x)=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\ (0<x<a)$일 때, $XY$의 최댓값을 구하시오. **[15점]**

**[문제 2-2]** 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다. (단, 구간 $(0, \infty)$에서 $f(x)>0$이다.)

(Ⅰ) $f(1)=3$
(Ⅱ) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 P에 대하여 $XY=c$ ($c$는 상수)이다.

함수 $\{f(x)\}^2+\frac{1}{f(x)}$이 $x=k$에서 최솟값을 가질 때, 실수 $k$의 값을 구하시오. **[15점]**

**[문제 3]** 아래의 **[문제 3-1]**, **[문제 3-2]**, **[문제 3-3]**에서 주어진 함수 $f(t)$, $g(t)$는 각각 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수이다. 실수 $t$에 대하여 점 P를 $\mathrm{P}(f(t), g(t))$, 점 P′을 $\mathrm{P}'(f'(t), g'(t))$라 할 때, 세 점 Q, R, S가 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(Ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}<0$, $a|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ (단, $a$는 1보다 큰 실수이다.)
(Ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}>0$, $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$
(Ⅲ) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{PS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}<0$, $b|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PS}}|$ (단, $b$는 양의 실수이다.)

다음 물음에 답하시오.

**[문제 3-1]** $a=2$, $b=5$이고 $f(t)=t$, $g(t)=4-2t$일 때, $\int_0^2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}})^2dt$의 값을 구하시오. **[10점]**

**[문제 3-2]** $a=5$이고 $f(t)=2\cos t$, $g(t)=\sin t$일 때, 점 T $(0, 1)$에 대하여 $0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서 $(\overrightarrow{\mathrm{OT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2$의 최댓값을 구하시오. **[15점]**

**[문제 3-3]** $a>2$이고 모든 실수 $t$에 대하여 $f(t)g(t)=1$, $f(t)>a$, $f'(t)>0$일 때, 모든 실수 $t$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}>0$임을 보이시오. **[15점]**