수시모집 논술시험 자연계열 기출문제 및 해설

1 출제의도

가. 문제 1번

조건부확률의 의미를 이해하고 확률의 덧셈정리와 확률의 곱셈정리를 이용하여 주어진 확률을 구할 수 있는지 평가한다.

나. 문제 2번

함수에 대한 평균값 정리를 이해하고 Σ의 성질과 수열의 극한에 대한 기본 성질을 바탕으로 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

다. 문제 3번

함수의 뜻과 함수의 합성을 이해하고 합의 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는지를 평가한다.

문제 3-1

함수의 개념을 이해하고 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제이다.

문제 3-2

함수의 합성을 이해하고 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제이다.

라. 문제 4번

평균값 정리, 수열의 극한의 기본 성질을 이해하고 함수의 그래프의 개형을 바탕으로 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 관련된 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

문제 4-1

수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제이다.

문제 4-2

평균값의 정리와 수열의 극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구하는 문제이다.

마. 문제 5번

접선의 방정식을 구하여 등비급수와 관련된 문제를 해결하는 과정 및 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하여 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

문제 5-1

접선의 방정식을 구하고 등비급수를 구하는 문제이다.

문제 5-2

정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하여 극한값을 구하는 문제이다.

바. 문제 6번

좌표평면에서 위치벡터와 평면벡터의 내적을 이용하여 벡터와 관련된 문제를 해결할 수 있는지 평가한다.

문제 6-1

평면벡터의 내적을 이용하여 원의 방정식을 구하는 문제이다.

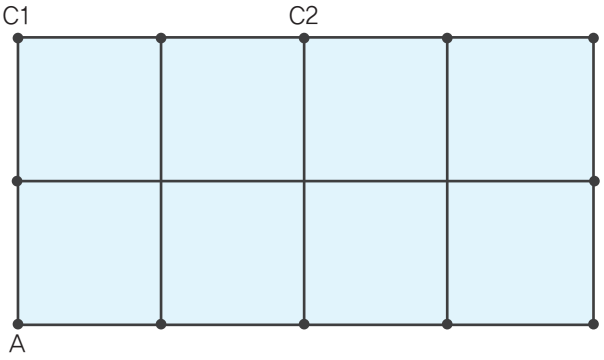
문제 6-2

좌표평면에서 위치벡터와 평면벡터의 내적을 이용하여 도형의 길이를 구하는 문제이다.

2 문항 해설

문제 1

자동차가 북쪽 경계에서 멈추는 경우는 아래 그림에서와 같이 $C1$, $C2$에서 멈추는 두 가지의 경우 밖에 없다.



(ⅰ) $C1$에서 멈추는 경우

다음 수가 적힌 공이 차례로 나오면 자동차는 $C1$에서 멈추고 시행을 종료한다.

$(1,1),\ (1,3),\ (1,5),\ (3),\ (5)$

따라서 이 경우의 확률은

$$3\times\left(\frac{1}{9}\right)^2+2\times\frac{1}{9}=\frac{7}{27}$$

(ⅱ) $C2$에서 멈추는 경우

다음 수가 적힌 공이 차례로 나오면 자동차는 $C2$에서 멈추고 시행을 종료한다.

$(1,2,1),\ (1,2,3),\ (1,2,5),\ (2,1,1),\ (2,1,3),\ (2,1,5),\ (2,3),\ (2,5)$

따라서 이 경우의 확률은

$$6\times\frac{2}{9}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2+2\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{16}{243}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 시행을 종료하였을 확률은

$$\frac{7}{27}+\frac{16}{243}=\frac{79}{243}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

위의 시행을 두 번 하였을 때 자동차가 북쪽 경계에 도달하여 멈추는 경우는 다음 수가 적힌 공이 차례로 나온 경우이다.

$(1,1),\ (1,3),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,5)$

따라서 이 경우의 확률은

$$3\times\left(\frac{1}{9}\right)^2+2\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{7}{81}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡으로부터 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{7}{81}}{\frac{79}{243}}=\dfrac{21}{79}$

문제 2

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[n,\ n+2k]$에서 연속이고 열린구간 $(n,\ n+2k)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$0 < c_k < 2k$인 어떤 c_k에 대하여 $\dfrac{f(n+2k)-f(n)}{n+2k-n} = f'(n+c_k)$이다.

한편 $f'(x) = \dfrac{x^{2025}+x^{2024}+1}{x^{2025}+x^{1885}+1}$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(n+c_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+c_k)^{2025}+(n+c_k)^{2024}+1}{(n+c_k)^{2025}+(n+c_k)^{1885}+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{10}\frac{f(n+2k)-f(n)}{(k-1)k(k+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{10}\frac{2f'(n+c_k)}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{10}\lim_{n\to\infty}\frac{2f'(n+c_k)}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{10}\frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11} = \frac{72}{55}$$

문제 3-1

$2025 = 3^4\times 5^2$이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) n이 2025와 서로소인 경우

n이 2025와 서로소이면 $f(n) = f(n^2)$을 만족시킨다.

2025이하의 자연수 중 3의 배수의 개수는 675, 5의 배수의 개수는 405, 15의 배수의 개수는 135이므로

3의 배수 또는 5의 배수인 자연수의 개수는

$675+405-135 = 945$

그러므로 (i)의 경우의 수는 $2025-945 = 1080$

(ii) n이 2025와 서로소가 아닌 경우

n이 2025와 서로소가 아니면 다음 경우가 $f(n) = f(n^2)$을 만족시킨다.

① n이 3^4의 배수이지만 5의 배수가 아닌 경우

$2025 = 3^4\times 25$이고 , $1\times 3^4,\ 2\times 3^4,\ \cdots.\ 25\times 3^4$ 중 5의 배수가 아닌 수의 개수는 $25-5 = 20$

② n이 5^2의 배수이지만 3의 배수가 아닌 경우

$2025 = 5^2\times 81$이고 $1\times 5^2,\ 2\times 5^2,\ \cdots.\ 81\times 5^2$ 중 3의 배수가 아닌 수의 개수는 $81-27 = 54$

③ n이 3^4의 배수면서 5^2의 배수인 경우

$n = 2025$이므로 개수는 1

그러므로 (ii)의 경우의 수는 $20+54+1 = 75$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $1080+75 = 1155$

문제 3-2

$f(n) \le 2025$이므로 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) n이 2025의 약수인 경우

n이 2025의 약수이면 $f(n)=\dfrac{2025}{n}$, $f(f(n))=f\left(\dfrac{2025}{n}\right)=n$

이므로 $f(f(n))<n$을 만족시키지 못한다.

(ii) n이 2025의 약수가 아닌 경우

$n=m\times 3^k\times 5^l$이라 하자.

(단, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ l=0,\ 1,\ 2$이고 m은 15와 서로소인 2 이상인 자연수)

$f(n)=3^{4-k}\times 5^{2-l}$, $f(f(n))=f(3^{4-k}\times 5^{2-l})=3^k\times 5^l=\dfrac{n}{m}<n$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는 $2025-(2025\text{의 약수의 개수})=2025-15=2010$

문제 4

$c_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx-\frac{1}{(n+1)^\alpha}$이라고 하면 $c_n=\begin{cases}a_n & (\alpha=1)\\ b_n & (\alpha\neq 1)\end{cases}$ 이 성립한다. 먼저 다음 부등식이 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}\le c_n\le\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right\}$$

$f(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$라고 하자. 이때 구간 $(0,\infty)$에서 함수 f는 감소하고, 아래로 볼록하다.

세 점 $(n+1,f(n+1))$, $(n+1,f(n+2))$, $(n+2,f(n+2))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}$이다. 평균값 정리에 의하여 $0<\theta<1$인 어떤 θ에 대하여 다음이 성립한다.

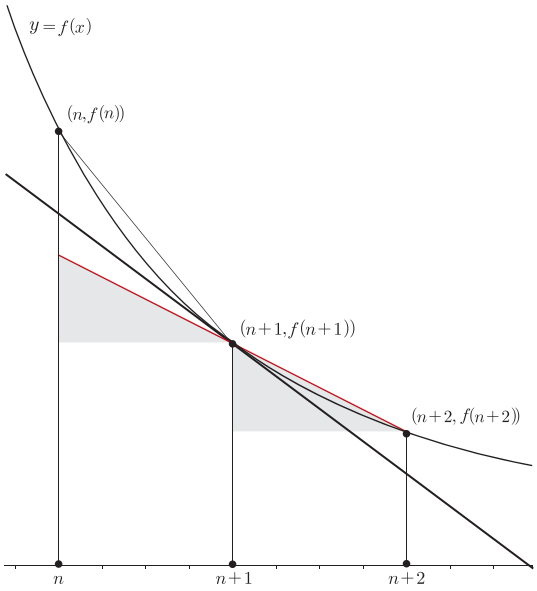
$$\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{(n+2)^\alpha}=\frac{(n+2)^\alpha-(n+1)^\alpha}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha}=\frac{\alpha(n+1+\theta)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha}\le\frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}}$$

즉, $\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\ge-\dfrac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}}=f'(n+1)$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}\le c_n$이다. (아래 그림 참고.)

한편 c_n은 세 점 $(n,f(n)),(n,f(n+1)),\ (n+1,f(n+1))$이 이루는 삼각형의 넓이보다 작다.

따라서 다음 부등식을 얻는다. $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}-\dfrac{1}{(n+2)^\alpha}\right\}\le c_n\le\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n^\alpha}-\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}\right\}$



문제 4-1

$\alpha=1$이면

$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \le a_n \le \frac{1}{2n(n+1)}$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{n(3n+1)^3}{4(n+1)^2(n+2)^2} \le n(3n+1)^3 {a_n}^2 \le \frac{n(3n+1)^3}{4n^2(n+1)^2}$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 다음을 얻는다.

$$\lim_{n\to\infty} n(3n+1)^3 {a_n}^2 = \frac{27}{4}$$

문제 4-2

평균값 정리에 의하여 $0<\theta<1$인 어떤 θ에 대하여 다음이 성립한다.

$\frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{(n+2)^\alpha} = \frac{\alpha(n+1+\theta)^{\alpha-1}}{(n+1)^\alpha(n+2)^\alpha} \ge \frac{\alpha}{(n+2)^{\alpha+1}}$ 같은 방식으로 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \le \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$$

따라서

$\frac{\alpha}{2}\frac{n^{p-(\alpha+1)}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\alpha+1}} = \frac{1}{2}\frac{\alpha n^p}{(n+2)^{\alpha+1}} \le n^p b_n \le \frac{1}{2}\frac{\alpha n^p}{n^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{2}n^{p-(\alpha+1)}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

수열 $\{n^p b_n\}$의 극한이 0이 아니기 위해서는 $p=\alpha+1$이어야 하고 이때의 극한값은 $L=\frac{\alpha}{2}$이다.

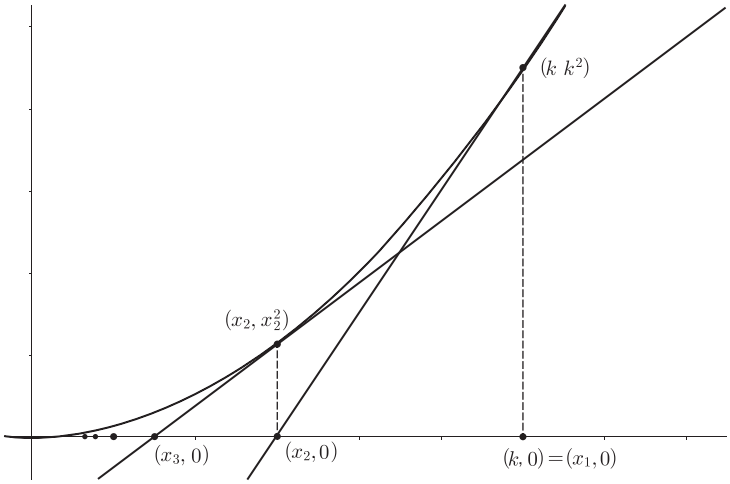
그러므로 $p+L=\frac{3\alpha}{2}+1$이다.

문제 5-1

$f(x)=x^2$이라 하자. $(x_n,\ {x_n}^2)$에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식은 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$이다.

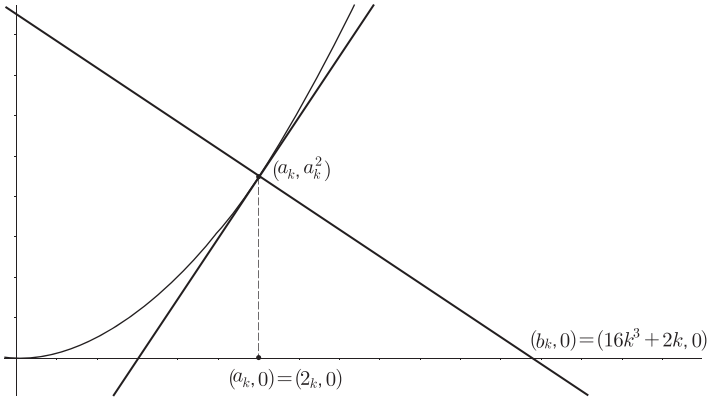
$f'(x)=2x$이므로 $x_{n+1}=-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}+x_n$에서 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n$이다. 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 k이고

공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로 $a_k=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}k\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{k}{1-\frac{1}{2}}=2k$이다. 따라서 $a_{2025}=4050$



문제 5-2

주어진 l에 수직인 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{4k}(x-2k)+4k^2$이므로 $b_k=16k^3+2k$이다.



$c_m=\left(\dfrac{{a_1}^3}{b_m-a_m}+1\right)^{\frac{a_1^2}{m^3}}\times\left(\dfrac{{a_2}^3}{b_m-a_m}+1\right)^{\frac{a_2^2}{m^3}}\times\cdots\times\left(\dfrac{{a_m}^3}{b_m-a_m}+1\right)^{\frac{a_m^2}{m^3}}$이라 하자.

$b_m-a_m=16m^3$이므로

$$c_m=\left(\frac{1^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times1^2}{m^3}}\times\left(\frac{2^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times2^2}{m^3}}\times\left(\frac{3^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times3^2}{m^3}}\times\cdots\times\left(\frac{m^3}{2\times m^3}+1\right)^{\frac{4\times m^2}{m^3}}$$

$\lim_{m\to\infty} c_m = \alpha$라 하자.

$\ln c_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{4k^2}{m^3} ln\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^3 + 1\right\}$이므로

$\lim_{m\to\infty} \ln c_m$

$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{4k^2}{m^3} ln\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^3 + 1\right\}$

$= \int_0^1 4x^2 \ln\left(\frac{x^3}{2}+1\right)dx = 4\ln\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$

$\ln\alpha = 4\ln\frac{3}{2} - \frac{4}{3}$이므로 $\alpha = e^{4\ln\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} = \frac{81}{16}e^{-\frac{4}{3}}$

문제 6-1

P가 원 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ 위를 움직일 때 Q가 나타내는 도형을 생각해보자.

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$라고 하면 직선 AP의 방정식은 $y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta+2}(x+2)$이다.

두 조건 (Ⅰ), (Ⅱ)에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$는 방향이 같은 벡터이므로 점 Q의 x좌표를 $t(t \geq -2)$라 하면

$\mathrm{Q}\left(t,\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta+2}(t+2)\right)$에 대하여 다음을 구할 수 있다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{(\cos\theta+2)^2 + (\sin\theta)^2},$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = \sqrt{(t+2)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+2}\right)^2 (t+2)^2} = (t+2) \times \frac{\sqrt{(\cos\theta+2)^2 + (\sin\theta)^2}}{\cos\theta+2}$$

조건 (Ⅱ)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = (t+2) \times \frac{(\cos\theta+2)^2 + (\sin\theta)^2}{\cos\theta+2} = 9$이고

$t = \frac{9(\cos\theta+2)}{(\cos\theta+2)^2 + (\sin\theta)^2} - 2 = \frac{8+\cos\theta}{5+4\cos\theta}$이므로

$\mathrm{Q}\left(\frac{8+\cos\theta}{5+4\cos\theta}, \frac{9\sin\theta}{5+4\cos\theta}\right)$이다.

점 Q의 좌표를 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$라고 하면 $X = \frac{8+\cos\theta}{5+4\cos\theta}$, $Y = \frac{9\sin\theta}{5+4\cos\theta}$이고

$\cos\theta = \frac{8-5X}{4X-1}$, $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{72X-63-9X^2}}{4X-1}$

$Y = \frac{9\sin\theta}{5+4\cos\theta} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{72X-63-9X^2}$이므로 $(X-4)^2 + Y^2 = 9$이다.

따라서 점 Q가 나타내는 도형의 식은 $(x-4)^2 + y^2 = 9$이다.

문제 6-2

(ⅰ) 점 P가 호 R_1OR_2 위의 점인 경우

$-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$인 θ에 대하여 $P(\cos\theta - 1, \sin\theta)$라고 하면 [문제 6-1]의 풀이와 같이 $Q\left(t, \frac{\sin\theta}{\cos\theta+1} \times (t+2)\right)$에 대해 주어진 조건 (Ⅱ)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = \sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta} \times (t+2) \times \frac{\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}}{\cos\theta+1} = 2(t+2) = 9$$

$t = \frac{5}{2}$이므로 원 $C_3 : (x-4)^2+y^2 = 9$와 직선 $x = \frac{5}{2}$의 두 교점을 M, N이라 할 때,

점 Q가 나타내는 도형은 선분 MN이다.

(ⅱ) 점 P가 호 $R_1O'R_2$ 위의 점인 경우

[문제 6-1]의 풀이와 같이 생각하면 점 $T(7, 0)$에 대하여 [문제 6-2]의 조건을 만족하는 점 Q가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴의 호 MTN이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 점 Q가 나타내는 도형은 선분 MN과 호 MTN으로 이루어진 도형이다.

점 M, N을 구하면 $M\left(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $N\left(\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$이 된다. 따라서 점 Q가 이루는 도형의 길이는 선분 MN의 길이와 호 MTN의 길이의 합이므로 $2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{4}{3}\pi = 3\sqrt{3} + 4\pi$이다.

