문항카드 9. 논술전형 수학 오후 1번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 확률과 통계
	핵심개념 및 용어	직선의 방정식, 원의 방정식, 조건부확률
예상 소요 시간	10분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1]

한 개의 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b,c라 하자.

이차방정식 $x^2+y^2+ax+by+6=0$이 원을 나타낼 때, 방정식 $x+2y+c=0$이 나타내는 직선이 이 원의 넓이를 이등분할 확률을 구하시오. [10점]

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「수학」,「확률과 통계」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 직선의 방정식, 원의 방정식, 조건부확률에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학** [10수학02-03] 직선의 방정식을 구할 수 있다. [10수학02-06] 원의 방정식을 구할 수 있다. **확률과 통계** [12확통02-05] 조건부확률의 의미를 이해하고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	이준열 외	천재교육	2018	122-150
	수학	배종숙 외	금성출판사	2018	126-150
	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	58-61
	확률과 통계	김원경 외	비상	2019	52-56

5. 문항 해설

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-24}{4}$

이차방정식이 원을 나타내려면 $\frac{a^2+b^2-24}{4}>0$, $a^2+b^2>24$를 만족해야 한다.

$a=1$일 때, $b=5,6$
$a=2$일 때, $b=5,6$
$a=3$일 때, $b=4,5,6$
$a=4$일 때, $b=3,4,5,6$
$a=5$일 때, $b=1,2,3,4,5,6$
$a=6$일 때, $b=1,2,3,4,5,6$
(a,b)의 순서쌍의 개수는 총 23가지이다.
이때 c는 모든 수가 가능하므로 전체 경우의 수는 $23\times6=138$이다.

직선이 이 원의 넓이를 이등분하는 경우는 직선이 원의 중심 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$를 지나야 한다.

따라서, $c=\frac{a}{2}+b$을 만족해야 하고, 이를 만족하면서 동시에 $a^2+b^2>24$를 만족하는 경우는

$a=2$일 때, (b,c)가 $(5,6)$
$a=4$일 때, (b,c)가 $(3,5),(4,6)$
$a=6$일 때, (b,c)가 $(1,4),(2,5),(3,6)$
으로 총 6가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{138}=\frac{1}{23}$가 된다.

문항카드 10. 논술전형 수학 오후 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	중복조합
예상 소요 시간	25분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2]

방정식 $x_1+x_2+x_3=5$를 만족시키는 양의 정수해를 <표 1>과 같이 나타냈을 때, 숫자 2가 나오는 횟수는 6이다. 자연수 n에 대하여 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$을 만족시키는 양의 정수해를 <표 2>와 같이 나열하였을 때, 자연수 $r\ (1\le r\le n-k+1)$가 나오는 횟수를 n, k, r를 이용하여 나타내시오. (단, k는 $2\le k\le n$인 자연수이다.) [12점]

x_1	x_2	x_3
3	1	1
1	3	1
1	1	3
2	2	1
2	1	2
1	2	2

<표 1>

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k

<표 2>

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「확률과 통계」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 중복조합에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**확률과 통계** [12확통01-02] 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	확률과 통계	황선욱 외	미래엔	2019	18-21
	확률과 통계	김원경 외	비상	2019	17-19
	확률과 통계	권오남 외	교학사	2019	19-21

5. 문항 해설

$x_1 = r$이 되는 양의 정수해의 개수는 $x_2 + x_3 + \cdots + x_k = n - r$를 만족하는 양의 정수해의 개수이다.
$x_2' = x_2 - 1$, $x_3' = x_3 - 1$, $\cdots$, $x_k' = x_k - 1$이라 하면
$x_2' + x_3' + \cdots + x_k' = n - r - k + 1$이고 이 방정식의 해의 개수는 ${}_{k-1}\mathrm{H}_{n-r-k+1}$이다.
따라서, x_1 중 r가 나오는 횟수는 ${}_{k-1}\mathrm{H}_{n-r-k+1}$이다.
이는 x_2, x_3, $\cdots$, x_k의 경우에도 마찬가지이므로 자연수 r가 나오는 횟수는 다음과 같다.

$$k \times {}_{k-1}\mathrm{H}_{n-r-k+1} = k \times {}_{n-r-1}\mathrm{C}_{n-r-k+1} = k \times {}_{n-r-1}\mathrm{C}_{k-2} = \frac{k \times (n-r-1)!}{(k-2)!(n-r-k+1)!}$$

문항카드 11. 논술전형 수학 오후 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ
	핵심개념 및 용어	함수의 최대최소
예상 소요 시간	30분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

어떤 삼각형 ABC가 있을 때, 사각형 PQRS가 직사각형이 되도록 삼각형 ABC의 세 변 위의 네 점 P, Q, R, S를 선택한다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1]

사각형 PQRS의 넓이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 PQRS의 넓이의 차가 43이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [5점]

[문제 3-2]

사각형 P′Q′R′S′이 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [15점]

(가) 사각형 P′Q′R′S′은 직사각형이고 네 꼭짓점은 삼각형 ABC와 사각형 PQRS의 변 위에 있다. 그리고 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 내부가 서로 겹치는 부분은 없다.

(나) 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이에서 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합을 뺀 값은 47이다.

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「수학Ⅱ」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 함수의 최대 최소에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**수학Ⅱ** [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅱ	김원경 외	비상	2018	78-85
	수학Ⅱ	권오남 외	교학사	2018	88-95
	수학Ⅱ	황선욱 외	미래엔	2018	82-88

5. 문항 해설

[문제 3-1]

사각형 PQRS의 넓이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 PQRS의 넓이의 차가 43이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [5점]

꼭지점 A에서 밑변 BC에 수선의 발을 내릴 수 없으면 사각형이 내접할 수 없으므로 일반성을 잃지 않고 삼각형 ABC와 사각형 PQRS가 다음 그림과 같이 내접한다고 가정하자. (각ABC나 ACB가 직각인 경우도 포함하여 생각한다.)

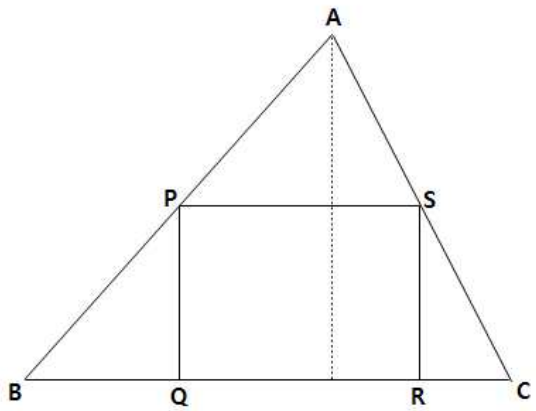


그림 : **[문제 3-1]** 에 관한 보충자료

삼각형 ABC의 밑변의 길이를 a, 높이를 h라 하자.
그림과 같이 삼각형 ABC와 삼각형 APS는 닮음이므로, 닮음비를 $1:t$라고 하자. (단, $0<t<1$)
이때 닮음에 의해 사각형 PQRS의 가로의 길이는 ta, 세로의 길이는 $(1-t)h$가 된다.

사각형PQRS의 넓이는 $S=S(t)=ta\times(1-t)h=t(1-t)ah$ 이고 $t=\frac{1}{2}$에서 최대값 $\frac{1}{4}ah$를 갖는다. 이 때 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $\frac{a}{2},\frac{h}{2}$이다.

따라서 최대가 되는 직사각형의 넓이는 삼각형 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 삼각형의 넓이는 $43\times2=86$가 된다.

[문제 3-2]

사각형 P′Q′R′S′이 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [15점]

(가) 사각형 P′Q′R′S′은 직사각형이고 네 꼭짓점은 삼각형 ABC와 사각형 PQRS의 변 위에 있다. 그리고 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 내부가 서로 겹치는 부분은 없다.
(나) 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이에서 두 사각형 PQRS와 P′Q′R′S′의 넓이의 합을 뺀 값은 47이다.

일반성을 잃지 않고 삼각형 ABC와 사각형 PQRS, P′Q′R′S′가 다음 그림과 같이 내접한다고 가정할 수 있다.

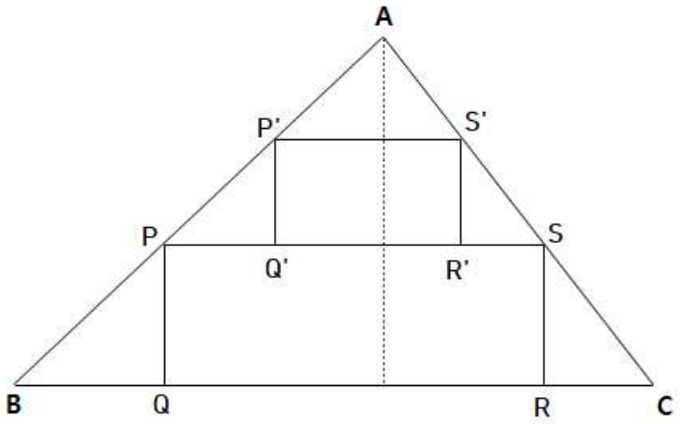


그림 : **[문제 4-2]** 에 관한 보충 자료

삼각형 ABC의 밑변의 길이를 a, 높이를 h라 하자.
그림과 같이 삼각형 ABC와 삼각형 APS는 닮음이므로, 닮음비를 $1:t$라고 하자. (단, $0<t<1$)
이때 닮음에 의해 사각형PQRS의 가로의 길이는 ta, 세로의 길이는 $(1-t)h$가 된다.
사각형 P′Q′R′S′는 그림과 같이 삼각형 APS에 내접해야 한다. 이때 사각형 P′Q′R′S′의 넓이가 최대가 되도록 하면, 그 넓이는 [문제 3-1] 에 의해 $\frac{1}{2}\left(\frac{ta\times th}{2}\right)=\frac{ah\,t^2}{4}$이다.

따라서 두 사각형의 넓이의 합은 $S=S(t)=ah\,t(1-t)+\frac{aht^2}{4}=ah\,(t-\frac{3}{4}t^2)$ 이고 $t=\frac{2}{3}$ 일 때 최대값 $\frac{ah}{3}$을 갖는다. 이 때, 삼각형 ABC에서 사각형 PQRS 와 사각형 P′Q′R′S′를 제외한 부분의 넓이는 $\frac{ah}{2}-\frac{ah}{3}=\frac{ah}{6}=47$이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{ah}{2}=\frac{6\times 47}{2}=141$이다.

문항카드 12. 논술전형 수학 오후 4번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분
	핵심개념 및 용어	수열의 극한
예상 소요 시간	25분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[제시문]

좌표평면에서 네 직선 $x=-\frac{1}{3}$, $x+y=2$, $y=\frac{1}{5}$, $y=\frac{4}{3}$로 이루어지는 사각형을 D라 하자. 자연수 n에 대하여, 네 변이 좌표축에 평행한 정사각형 중에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2^n}$이고 각 꼭짓점의 x좌표와 y좌표에 2^n을 곱하여 각각 정수가 되는 정사각형들의 모임을 집합 S_n이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레 및 내부에 포함되는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하고, 실수 α에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\alpha n+\ln f(n)$ 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 α의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 을 구하시오. **[8점]**

[문제 4-2] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레와 두 점 이상에서 만나는 모든 정사각형의 개수를 $g(n)$ 이라 하고, 실수 β에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=\beta n+\ln g(n)$ 이라 하자. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하도록 하는 β의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} c_n$을 구하시오. **[10점]**

3. 출제 의도

고등학교 교과과정에서 중요하게 다루는「미적분」과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 수열의 극한에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학과에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2015-74호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**미적분** [12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분	이준열 외	천재교육	2019	11-24
	미적분	권오남 외	교학사	2019	11-28
	미적분	홍성복 외	지학사	2019	11-26

5. 문항 해설

[문제 4-1] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레 및 내부에 포함되는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하고, 실수 α에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = \alpha n + \ln f(n)$ 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 α의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 을 구하시오. **[8점]**

S_n의 원소 중에서 D의 둘레 및 내부와 만나는 모든 정사각형의 개수를 $h(n)$이라 하자.
사각형 D의 넓이를 A라 하면, $f(n)$과 $h(n)$의 정의에 따라

$$\text{식1 : } 4^{-n} f(n) \le A \le 4^{-n} h(n)$$

사각형 D의 네 변의 길이는 $\frac{32}{15}$, $\frac{17}{15}$, 1, $\frac{17}{15}\sqrt{2}$이다.

$$2^{-n}(h(n)-f(n)) \le \frac{32}{15}+\frac{17}{15}+1+\frac{17\sqrt{2}}{15}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+4<10$$

$$\text{식2 : } 4^{-n}(h(n)-f(n))<10\times 2^{-n}$$

식1, 식2와 수열의 극한에 대한 성질에 의해 $0 \le \lim_{n\to\infty}\{A-4^{-n}f(n)\} \le \lim_{n\to\infty}\frac{10}{2^n}=0$이다.

$\lim_{n\to\infty} 4^{-n} f(n) = A$ 이다.

$b_n = \alpha n + \ln f(n) = \ln\{f(n)e^{\alpha n}\}$이 수렴하려면 $f(n)e^{\alpha n}$은 0이 아닌 양의 실수 m으로 수렴해야한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{-n}f(n)}{f(n)e^{\alpha n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4e^{\alpha}}\right)^n = \frac{A}{m}\left(\frac{A}{m}\neq 0\right)$이므로 $\frac{A}{m}=1$이고, $4e^{\alpha}=1$, $\alpha = -\ln 4$이다.

이때 수열 $\{b_n\}$의 극한값은 $\ln A$이고 $A=\frac{799}{450}$이므로, $\lim_{n\to\infty} b_n = \ln\frac{799}{450}$이다.

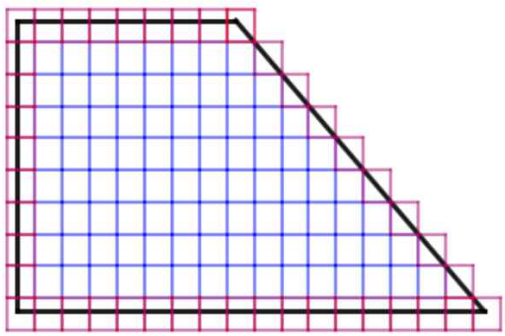


그림 : **[문제4-1]** 및 **[문제4-2]**에 관한 보충 자료

[문제 4-2] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레와 두 점 이상에서 만나는 모든 정사각형의 개수를 $g(n)$이라 하고, 실수 β에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n = \beta n + \ln g(n)$ 이라 하자. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하도록 하는 β

의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} c_n$을 구하시오. **[10점]**

사각형 D의 네 변의 길이는 $\frac{32}{15}$, $\frac{17}{15}$, 1, $\frac{17}{15}\sqrt{2}$이다.

$L_1 = 1+\frac{32}{15}+\frac{17}{15}=\frac{64}{15}$, $L_2=\frac{17}{15}\sqrt{2}$, $L=L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}=\frac{81}{15}$라고 하자.

사각형 D의 x축 또는 y축과 평행한 세 변과 만나는 S_n의 원소의 개수를 $g_1(n)$, 비스듬한 변과 만나는 S_n의 원소의 개수를 $g_2(n)$이라 하면, $L_1 \le 2^{-n}(g_1(n)+2)$, $\frac{L_2}{\sqrt{2}} \le 2^{-n}g_2(n)$이고

$L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}-2^{-n+1} \le 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))$ 을 만족한다.

$2^{-n}(g_1(n)-4) \le L_1$, $2^{-n}(g_2(n)-2) \le \frac{L_2}{\sqrt{2}}$이므로 $2^{-n}(g_1(n)+g_2(n)) \le L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}+6\times 2^{-n}$이다.

수열의 극한의 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))=L_1+\frac{L_2}{\sqrt{2}}=L$

그리고 $g(n)$, $g_1(n)$, $g_2(n)$의 정의에 의해 $g_1(n)+g_2(n)-4 \le g(n) \le g_1(n)+g_2(n)$이고

$2^{-n}(g_1(n)+g_2(n)-4) \le 2^{-n}g(n) \le 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))$이다.

수열의 극한의 성질에 의해 $\lim_{n\to\infty} 2^{-n}g(n)=\lim_{n\to\infty} 2^{-n}(g_1(n)+g_2(n))=L$이다.

$c_n=\beta n+\ln g(n)=\ln\{g(n)e^{\beta n}\}$이 수렴하려면 $g(n)e^{\beta n}$은 0이 아닌 양의 실수 c로 수렴해야한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-n}g(n)}{g(n)e^{\beta n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2e^{\beta}}\right)^n=\frac{L}{c}\left(\frac{L}{c}\neq 0\right)$이므로 $\frac{L}{c}=1$이고, $2e^{\beta}=1$, $\beta=-\ln 2$이다.

이때 수열 $\{c_n\}$의 극한값은 $\ln L$이므로, $\lim_{n\to\infty} c_n=\ln\frac{81}{15}$이다.