2021학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연2 (수학)

모집단위		수험번호		성명	

[문제 1]

한 개의 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. 이차방정식 $x^2+y^2+ax+by+6=0$이 원을 나타낼 때, 방정식 $x+2y+c=0$이 나타내는 직선이 이 원의 넓이를 이등분할 확률을 구하시오. **[10점]**

[문제 2]

방정식 $x_1+x_2+x_3=5$를 만족시키는 양의 정수해를 <표 1>과 같이 나타냈을 때, 숫자 2가 나오는 횟수는 6이다. 자연수 n에 대하여 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$을 만족시키는 양의 정수해를 <표 2>와 같이 나열하였을 때, 자연수 $r\,(1\le r\le n-k+1)$가 나오는 횟수를 n, k, r를 이용하여 나타내시오. (단, k는 $2\le k\le n$인 자연수이다.) **[12점]**

x_1	x_2	x_3
3	1	1
1	3	1
1	1	3
2	2	1
2	1	2
1	2	2

<표 1>

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k

<표 2>

[제시문]

어떤 삼각형 ABC가 있을 때, 사각형 PQRS가 직사각형이 되도록 삼각형 ABC의 세 변 위의 네 점 P, Q, R, S를 선택한다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] 사각형 PQRS의 넓이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이와 사각형 PQRS의 넓이의 차가 43이라 하자. 이 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. **[5점]**

[문제 3-2] 사각형 P'Q'R'S'가 다음 조건을 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. **[15점]**

(가) 사각형 P'Q'R'S'는 직사각형이고 네 꼭짓점은 삼각형 ABC와 사각형 PQRS의 변 위에 있다. 그리고 두 사각형 PQRS와 P'Q'R'S'의 내부가 서로 겹치는 부분은 없다.
(나) 두 사각형 PQRS와 P'Q'R'S'의 넓이의 합이 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이에서 두 사각형 PQRS와 P'Q'R'S'의 넓이의 합을 뺀 값은 47이다.

[제시문]

좌표평면에서 네 직선 $x=-\frac{1}{3}$, $x+y=2$, $y=\frac{1}{5}$, $y=\frac{4}{3}$로 이루어지는 사각형을 D라 하자. 자연수 n에 대하여, 네 변이 좌표축에 평행한 정사각형 중에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2^n}$이고 각 꼭짓점의 x좌표와 y좌표에 2^n을 곱하여 각각 정수가 되는 정사각형들의 모임을 집합 S_n이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레 및 내부에 포함되는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하고, 실수 α에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=\alpha n+\ln f(n)$ 이라 하자. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 α의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} b_n$ 을 구하시오. **[8점]**

[문제 4-2] S_n의 원소 중에서 사각형 D의 둘레와 두 점 이상에서 만나는 모든 정사각형의 개수를 $g(n)$이라 하고, 실수 β에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n=\beta n+\ln g(n)$ 이라 하자. 수열 $\{c_n\}$이 수렴하도록 하는 β의 값을 구하고, 이때 극한값 $\lim_{n\to\infty} c_n$을 구하시오. **[10점]**

연세대학교