문항카드 9. 논술전형 수학 오후 1번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 1번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학Ⅱ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	합성함수, 치환적분법
예상 소요 시간	20분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 1]

합성함수가 정의될 수 있는 범위에서 함수 $f(x)$에 대한 합성함수를 다음과 같이 나타내자.

$(f \circ f)(x) = f^{<2>}(x)$, $(f \circ f \circ f)(x) = f^{<3>}(x)$, $\cdots$, $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(x) = f^{<n>}(x)$

편의상 $f^{<i>}(x)$를 $f^{<i>}$라 하고, $f^{<0>} = x$라 하자.

함수 $f(x) = \ln(x)$라 할 때, 부정적분 $\int \frac{f^{<n>}}{f^{<0>} f^{<1>} f^{<2>} \cdots f^{<n-2>}} dx$ 를 $f^{<i>}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$로 나타내고, 그 이유를 설명하시오. (단, $n \geq 2$인 자연수이다.)

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <수학Ⅱ>, <미적분Ⅱ> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 합성함수, 치환적분법에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**[수학Ⅱ]** (나) 함수 1 함수 ② 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. 수학2212. 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. **[미적분Ⅱ]** (가) 지수함수와 로그함수 2 지수함수와 로그함수의 미분 ② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

	미적2122. 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다. (다) 미분법 1 여러 가지 미분법 ② 합성함수를 미분할 수 있다. 미적2312. 합성함수를 미분할 수 있다. (라) 적분법 2 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	이강섭 외	미래엔	2014	76~78
	수학II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	64~66
	수학II	이준열 외	천재교육	2014	73~75
	미적분II	이준열 외	천재교육	2014	37~40, 125~130, 176~182
	미적분II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	34~36, 100~103, 141~144

5. 문항 해설

합성함수 미분법에 의하여,

$$\frac{d}{dx}f^{<n-1>}=\frac{d}{dx}\ln(\ln\cdots(\ln(\ln x))\cdots)=\frac{1}{\ln(\ln\cdots(\ln(\ln x))\cdots)}\times\cdots\times\frac{1}{\ln x}\times\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{f^{<n-2>}\cdots f^{<1>}f^{<0>}}$$

이를 이용하여 직접 치환 적분을 할 수 있다.

$$\int f(f^{<n-1>})\frac{d}{dx}(f^{<n-1>})dx=\int f(y)dy=y(\ln y-1)+C=f^{<n-1>}(\ln(f^{<n-1>})-1)+C$$

$$=f^{<n-1>}(f^{<n>}-1)+C$$

정답 : $f^{<n-1>}[f^{<n>}-1]+C$ (단, C는 적분상수) 또는 $e^{f^{<n>}}(f^{<n>}-1)+C$ ($e^{\ln x}=x$이므로)

문항카드 10. 논술전형 수학 오후 2번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 2번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 미적분 II
	핵심개념 및 용어	원과 직선의 위치관계, 삼각함수의 극한
예상 소요 시간	20분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 2]

좌표평면 위에 원 $C: (x-a)^2+y^2=1$이 있다. 원점 O에서 원 C에 그은 두 접선이 원과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 원점 O를 지나는 임의의 직선이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점의 중점을 M이라 하자. 두 점 P, Q를 포함하여 점 M이 나타내는 도형을 곡선 L이라 하자. $\angle POQ=\theta$일 때, 곡선 L의 길이 l을 θ를 이용하여 나타내고, $\lim_{\theta\to 0+} l$의 값을 구하시오. (단, $a>1$인 실수이다.)

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <수학 I>, <미적분 II> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 원과 직선의 위치관계, 삼각함수의 극한에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] "수학과 교육과정"
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**[수학 I]** (다) 도형의 방정식 3 원의 방정식 ② 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 이해한다. 수학1332-1. 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 말할 수 있다. **[미적분 II]** (2) 삼각함수 1 삼각함수의 뜻과 그래프 ① 일반각과 호도법의 뜻을 안다.

	미적2211-2. 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다. 2 삼각함수의 미분 ② 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. 미적2222. 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

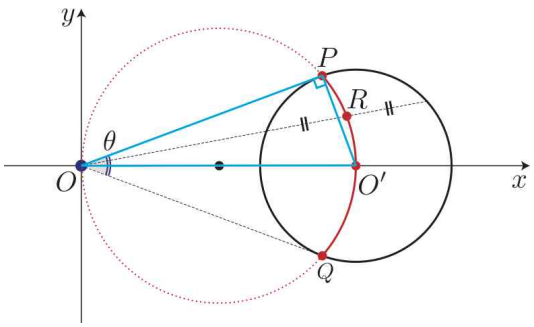
나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	이강섭 외	미래엔	2014	177~179
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2014	176~180
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2014	56~61, 97~100
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	48~51, 79~82

5. 문항 해설

주어진 원의 중심을 $\mathrm{O}'(a,0)$이라 하면, $\overline{\mathrm{OO}'}=a$이다. 직각삼각형 $\mathrm{OO}'\mathrm{P}$로부터, $a=\dfrac{1}{\sin(\theta/2)}$.

또한 점 O'과 곡선 L 위의 임의의 점 R을 이으면, 두 선분 $\mathrm{O}'\mathrm{R}$와 OR가 서로 수직임을 쉽게 알 수 있다. 왜냐하면 R이 해당하는 현의 중점이기 때문이다. 따라서 L은 선분 OO'을 지름으로 하는 원 위의 점들 중 주어진 원 C의 내부에 있는 호이다. 중심각이 2θ이고 반지름은 $\dfrac{a}{2}$인 호 L의 길이는 $\dfrac{a}{2}\times 2\theta=\dfrac{\theta}{\sin(\theta/2)}$로 주어진다. 따라서 $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta}{\sin(\theta/2)}=2\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\theta/2}{\sin(\theta/2)}=2$.



문항카드 11. 논술전형 수학 오후 3번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 3번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	미적분Ⅰ, 미적분Ⅱ
	핵심개념 및 용어	정적분, 평균값의 정리, 치환적분법
예상 소요 시간	25분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 3]

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $I=\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx$ (단, a와 b는 실수이고, $0<b<1$ 이다.) 라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 도함수가 $|f'(x)|\le 1$을 만족시킬 때, a와 b의 값에 관계없이 $|I|\le 2$ 임을 보이시오.

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <미적분Ⅰ>과 <미적분Ⅱ> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 정적분의 정의, 평균값 정리에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**[미적분Ⅰ]** (다) 다항함수의 미분법 3 도함수의 활용 ② 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. 미적1332. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. (라) 다항함수의 적분법 2 정적분 ③ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다. 미적1423. 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

	[미적분 II] (라) 적분법 1 여러 가지 적분법 ① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. 미적2411. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	미적분 I	이준열 외	천재교육	2014	133~137, 188~194
	미적분 I	황선욱 외	좋은책신사고	2014	112~115, 163~167
	미적분 II	이준열 외	천재교육	2014	176~182
	미적분 II	황선욱 외	좋은책신사고	2014	141~144

5. 문항 해설

치환하여 다음과 같이 정리한다.

$$I=\int_{-1}^{-b}\frac{f(a+x)}{x}dx+\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)}{x}dx=\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx.$$

평균값의 정리에 의해

함수 $f(x)$가 구간 $[a-x,a+x]$에서 연속이고 구간 $(a-x,a+x)$에서 미분가능하므로

$\frac{f(a+x)-f(a-x)}{2x}=f'(c)$인 c가 구간 $(a-x,a+x)$에 존재한다.

$\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=2f'(c)$ 이므로 $-2\le\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}\le 2$ 이다.

따라서 $-2\le\int_{b}^{1}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}dx\le 2$이다.

문항카드 12. 논술전형 수학 오후 4번

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	수시모집 논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열2(수학, 오후)/ 4번	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅰ, 기하와 벡터
	핵심개념 및 용어	부등식의 영역, 벡터의 내적
예상 소요 시간	25분/전체 90분	

2. 문항 및 제시문

[문제 4]

좌표평면 위의 영역 $C=\left\{(a,b)\left|\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{\sqrt{2}}b\geq 0,\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\geq 0\right.\right\}$가 있다. 영역 C에 있는 모든 점 (a,b)에 대하여 $ax+by\geq 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 영역 D의 경계선을 구하시오.

[문제 4-2] 영역 $B=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$일 때, 두 영역 B, C의 공통부분의 넓이와 두 영역 B, D의 공통부분의 넓이의 합을 구하시오.

[문제 4-3] 영역 $C'=\{(a,b)|(\cos\theta)a+(\sin\theta)b\geq 0,(\cos\omega)a+(\sin\omega)b\geq 0\}$에 있는 모든 점 (a,b)에 대하여 $ax+by\geq 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D'라 할 때, 영역 D'의 경계선을 구하시오. (단, $0<\theta<\omega<\frac{\pi}{2}$)

3. 출제 의도

고교 교육과정에서 중요하게 다루는 <수학 Ⅰ>, <기하와 벡터> 과목에서 문제를 출제하였다. 구체적으로 부등식의 영역, 벡터의 내적에 관한 기본적인 개념 및 원리를 묻는 문제를 출제하였다. 고등학교 수학에서 다루는 중요한 개념의 확실한 이해를 바탕으로 제시된 조건과 상황을 정확히 분석하여 논리적 사고력과 창의적 문제 해결 능력을 발휘할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8] “수학과 교육과정”
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	**[수학 Ⅰ]** (다)도형의 방정식 5 부등식의 영역 ① 부등식의 영역의 의미를 이해한다.

	수학1351-3. 연립부등식의 영역을 나타낼 수 있다. **[기하와 벡터]** (나) 평면벡터 2 평면벡터의 성분과 내적 ② 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. 기벡1222. 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	이강섭 외	미래엔	2014	203~210
	수학 I	류희찬 외	천재교과서	2014	202~209
	기하와 벡터	이강섭 외	미래엔	2014	86~94
	기하와 벡터	이준열 외	천재교육	2014	97~104

5. 문항 해설

[문제 4-1]

영역 C 를 표현하면 $\{(a,b)\,|\,b\geq-\sqrt{3}a,\ a\leq 0\}\cup\{(a,b)\,|\,b\geq -a,\ a\geq 0\}$이다. 경계선 위의 점 $(a,b)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$을 대입하고 $(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$을 대입하여 $ax+by\geq 0$을 만족하는 (x,y)는 $\frac{-1}{\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y\geq 0$과 $\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}y\geq 0$ 을 만족한다. 이러한 조건을 만족하는 (x,y)의 집합이 D 이다.

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{\sqrt{3}}\leq y\leq x,\ x\geq 0\right\}$이며 경계선은 $D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ x\geq 0\right\}$ 과 $D_2=\{(x,y)|y=x,\ x\geq 0\}$이다.

[문제 4-2]

영역 $B\cap D$가 나타내는 도형은 부채꼴이고, 이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$이다. 따라서 이 부채꼴의 반지름의 길이는 1이므로 영역 $B\cap D$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{12}=\boldsymbol{\frac{\pi}{24}}$

그리고 영역 $B\cap C$가 나타내는 도형은 부채꼴이고, 이 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{12}$이다. 따라서 이 부채꼴의 반지름의 길이는 1이므로 영역 $B\cap C$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{11\pi}{12}=\boldsymbol{\frac{11\pi}{24}}$이다.

따라서 구하는 답은 $\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$이다.

[문제 4-3번]

[문제 4-1] 과 같은 원리를 적용하면 경계선 $D_1'=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x,\ x\geq 0\right\}$,

$D_2' = \left\{(x, y) \,\middle|\, y = \dfrac{\sin\omega}{\cos\omega}x,\ x \geq 0\right\}$을 얻는다.

