2020학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 자연계열2 (수학, 오후)

모집단위		수험번호		성명	

[문제 1]

합성함수가 정의될 수 있는 범위에서 함수 $f(x)$에 대한 합성함수를 다음과 같이 나타내자.

$(f \circ f)(x) = f^{<2>}(x)$, $(f \circ f \circ f)(x) = f^{<3>}(x)$, $\cdots$, $(\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n})(x) = f^{<n>}(x)$

편의상 $f^{<i>}(x)$를 $f^{<i>}$라 하고, $f^{<0>} = x$라 하자.

함수 $f(x) = \ln(x)$라 할 때, 부정적분 $\int \frac{f^{<n>}}{f^{<0>} f^{<1>} f^{<2>} \cdots f^{<n-2>}} dx$ 를 $f^{<i>}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$로 나타내고, 그 이유를 설명하시오. (단, $n \geq 2$인 자연수이다.) **[10점]**

[문제 2]

좌표평면 위에 원 $C: (x-a)^2 + y^2 = 1$이 있다. 원점 O에서 원 C에 그은 두 접선이 원과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 원점 O를 지나는 임의의 직선이 원 C와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 이 두 점의 중점을 M이라 하자. 두 점 P, Q를 포함하여 점 M이 나타내는 도형을 곡선 L이라 하자. $\angle \mathrm{POQ} = \theta$일 때, 곡선 L의 길이 l을 θ를 이용하여 나타내고, $\lim_{\theta \to 0+} l$의 값을 구하시오. (단, $a > 1$인 실수이다.) **[10점]**

[문제 3]

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $I = \int_{-1}^{-b} \frac{f(a+x)}{x} dx + \int_{b}^{1} \frac{f(a+x)}{x} dx$ (단, a와 b는 실수이고, $0 < b < 1$ 이다.)라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 도함수가 $|f'(x)| \leq 1$을 만족시킬 때, a와 b의 값에 관계없이 $|I| \leq 2$ 임을 보이시오. **[20점]**

[제시문]

좌표평면 위의 영역 $C = \left\{(a,b) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b \geq 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \geq 0\right\}$가 있다. 영역 C에 있는 모든 점 (a,b)에 대하여 $ax + by \geq 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 영역 D의 경계선을 구하시오. **[7점]**

[문제 4-2] 영역 $B = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$일 때, 두 영역 B, C의 공통부분의 넓이와 두 영역 B, D의 공통부분의 넓이의 합을 구하시오. **[7점]**

[문제 4-3] 영역 $C' = \{(a,b) | (\cos\theta)a + (\sin\theta)b \geq 0, (\cos\omega)a + (\sin\omega)b \geq 0\}$에 있는 모든 점 (a,b)에 대하여 $ax + by \geq 0$을 만족시키는 점 (x,y)로 이루어진 영역을 D'라 할 때, 영역 D'의 경계선을 구하시오. (단, $0 < \theta < \omega < \frac{\pi}{2}$) **[6점]**