2014학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학, 물리)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

17세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f \mid f: R \to R\}$라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f \mid f \in U,\ f(x)=ax+b,\ a,b \in R\},$$
$$B=\{f \mid f \in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c \in R,\ a>0\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f \in U$ 대하여 $mx-f(x)$가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(다) 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{Max}(a,b)=\begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (a<b) \end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

[1-1] 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 설명하시오. [10점]

[1-2] (1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$도 집합 B의 원소임을 설명하시오. [10점]

(2) 문제 (1)의 두 함수 f와 F에 대하여 f에 F를 대응시키는 함수 $T: B \to B$를 생각할 수 있다. 함수 T에 대하여 $f_k=(\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 집합 B의 원소 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n} f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a, b, c에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[1-3] (1) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}(ax+b, cx+d)$ (단, $a<c$)에 대하여 $F(m)$이 존재하는 m의 범위를 찾고, $F(m)$을 a, b, c, d와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(2) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(\frac{a+b}{2}x-\frac{ab}{2}, \frac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a<b$)라 하자. 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 존재함을 보이고, $F(m)$을 a, b와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 집합 U의 원소 f에 대응하는 F가 집합 U의 원소라면 $T(f)=F$라 하고, 이 과정을 k번 반복할 수 있는 경우 $f_k=(\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(6x-10, \frac{1}{2}x^2\right)$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} f_n(3^n)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오. [10점]

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY

[문제2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 고대 그리스의 데모크리토스는 모든 물질이 매우 작은 입자로 구성되어 있다는 원자설을 제안하였고, 이 생각은 1808년 영국의 돌턴에 의해 부활되었다. 1911년, 영국의 러더퍼드는 수많은 헬륨 핵을 금박에 충돌시켜 본 결과, 대부분은 금박을 관통하지만 일부는 진행 방향이 큰 각도로 바뀌는 것을 관찰하였다.

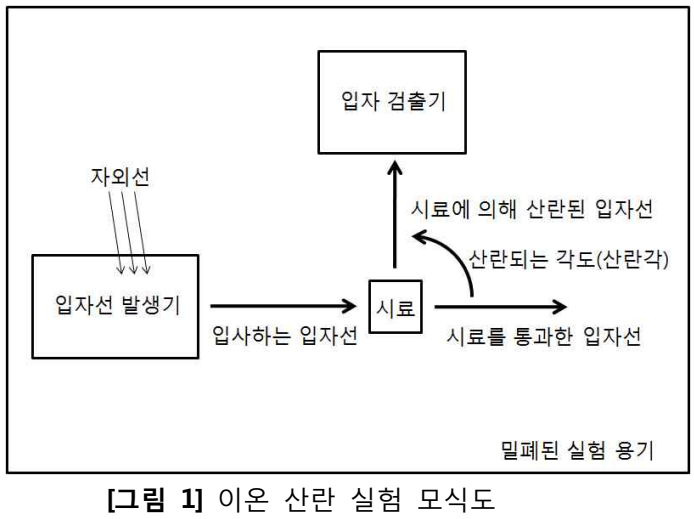
(나) [그림1]과 같이 질량과 운동 에너지를 알고 있는 입자를 충돌시켜 산란 후의 에너지를 조사하면 시료를 구성하는 원자의 질량수를 알아낼 수 있다.

(다) 입자선 발생기는 수소 원자를 양이온으로 이온화 시키는 장치와 이온화된 수소 원자를 가속시키는 장치로 구성된다. 수소 원자는 자외선을 쬐어 이온화 시킨다. 속박되지 않은 자유전자의 에너지는 수소 원자에 가장 강하게 속박된 전자의 에너지보다 13.6 eV 이상 높다.

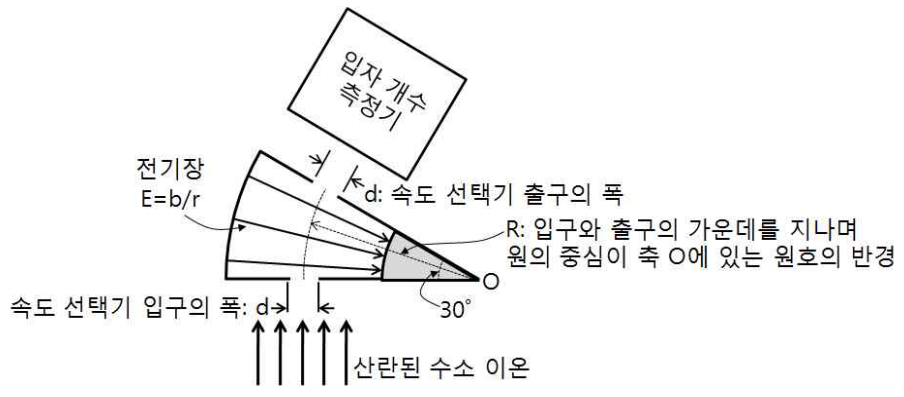
(라) 발생된 수소 이온은 가속 장치를 통과하면서 일정한 운동 에너지를 가지며, 시료 방향으로 조사하여 산란 실험을 하기 위해서는 진행을 방해하는 공기 분자와 충돌하지 않아야 한다. 가속된 수소 이온 1개가 단위길이당 공기 분자와 충돌하는 평균 횟수는 단위부피당 공기 분자의 개수와 공기 분자의 단면적의 곱과 같다. (단, 가속된 수소 이온의 속력은 빛의 속력에 비하여 매우 작다.)

(마) 시료에 입사한 수소 이온은 시료의 원자핵과 충돌하는 경우에는 큰 각도로 산란될 수 있고, 원자핵과 충돌하지 않는 경우에는 시료 내의 전자들과 상호작용하여 에너지를 잃을 수 있다.

(바) 입자 검출기는 속도 선택기와 입자 개수 측정기로 구성되어 있다. 속도 선택기는 [그림 2]와 같이 중심각이 30°인 부채꼴을 밑면으로 하는 기둥 모양이며, 수소 이온이 속도 선택기 안에 걸려있는 전기장을 지나도록 설계되어 있다. 속도 선택기의 각 단면에서 축 O로부터 거리가 r만큼 떨어진 위치에서의 전기장은 축 O를 향하며 그 크기는 $E=\frac{b}{r}$로 주어진다. (b는 상수이다.)



[그림 1] 이온 산란 실험 모식도



[그림 2] 입자 검출기의 단면 구조. 산란된 수소 이온은 속도 선택기 입구에 수직으로 입사하며, 입구를 통과하는 위치는 무작위로 달라질 수 있고, 출구를 통과한 입자는 모두 입자 개수 측정기에 들어간다. (단, d≪R 이다.)

<물리량 표>

상 수	값	상 수	값
볼츠만 상수(k_B)	1.4×10^{-23} J/K	수소 이온의 질량(m_p)	1.7×10^{-27} kg
기본 전하량(e)	1.6×10^{-19} C	전자의 질량(m_e)	9.1×10^{-31} kg
플랑크 상수(h)	6.6×10^{-34} J.s	정전기력(쿨롱) 상수(k)	9.0×10^{9} N.m^2/C^2

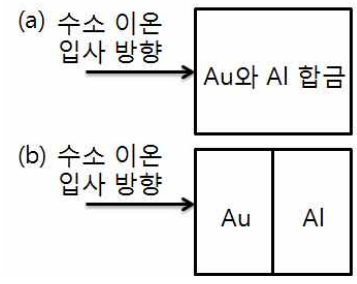
[2-1] 수소 원자에서 전자를 떼어 내어 수소 양이온을 만들기 위해 쬐어주어야 하는 자외선의 진동수에 대해서 논하고, 전기장을 사용하여 운동 에너지가 2×10^6 eV가 되도록 수소 이온을 가속하는 방법을 제안하시오. [8점]

[2-2] 이온화된 수소 원자가 공기 중(온도 300 K, 압력 10^5 N/m^2)에서 공기 분자와 부딪히지 않고 진행할 수 있는 평균 거리에 대하여 논하고, 산란 실험을 위한 실험 용기의 크기가 1 m × 1 m × 1 m 일 때 이온 산란 실험을 가능하게 하는 실험 용기 안의 공기 압력에 대하여 논하시오. 단, 공기 분자는 평균 반지름이 1×10^{-10} m 인 구형이고, 실험 용기 안의 공기 온도는 300 K으로 일정하다. [8점]

[2-3] [그림 1]의 입자 산란 실험에서 특정한 운동 에너지(E_0)로 시료의 원자핵에 입사하여 90°로 산란된 뒤에 시료 내 전자들과 상호작용 없이 검출기에 도착하는 수소 이온의 운동 에너지를 원자핵의 질량에 대한 함수로 논하시오. 단, 수소 이온은 시료의 원자핵과 한번만 충돌한다고 가정한다. [8점]

[2-4] [그림 2]와 같은 입자 검출기의 속도 선택기를 원호 또는 원호가 아닌 곡선의 경로로 통과할 수 있는 수소 이온의 속력 범위를 설명하시오. 설명한 속력 범위를 사용하여 시료 원자핵의 질량을 구별할 수 있는 분해능(입자 검출기로 구별할 수 있는 최소의 질량 차이)을 설명하시오. 단, 검출기는 산란각이 90°인 방향에 위치한다. [8점]

[2-5] 검출기를 산란각이 180°인 방향에 위치시키고, 오른쪽 [그림 3]과 같이 금(Au, 핵의 질량은 수소 이온의 197배로 함)과 알루미늄(Al, 핵의 질량은 수소 이온의 27배로 함)이 균일하게 섞인 시료(a)와, 금과 알루미늄의 두 층으로 이루어진 시료(b)를 각각 사용하여 수소 이온 산란 실험을 두 차례 진행하였다. 시료(b)에서 금 층과 알루미늄 층의 두께는 같다. 시료(a)를 사용한 실험과 시료(b)를 사용한 실험에서 시료의 원자핵과 한번만 충돌하고 검출기에 도달하는 수소 이온의 운동 에너지 범위를 비교하여 설명하시오. 단, 수소 이온이 원자핵과 충돌하지 않고 시료를 통과하는 경우에 시료의 구성 원소와 상관없이 단위길이당 운동 에너지의 손실이 같고, 두 실험에서 시료를 완전히 통과한 수소 이온은 초기 운동 에너지의 2%를 잃는다고 가정한다. [8점]



[그림3] 시료의 구조 및 수소 이온의 입사 방향

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY