2014학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학, 지구과학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

17세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f \mid f: R \to R\}$라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f \mid f\in U,\ f(x)=ax+b,\ a,b\in R\},$$
$$B=\{f \mid f\in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in R,\ a>0\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f\in U$ 대하여 $mx-f(x)$가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(다) 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{Max}(a,b)=\begin{cases} a & (a \geq b) \\ b & (a<b) \end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

[1-1] 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 설명하시오. [10점]

[1-2] (1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$도 집합 B의 원소임을 설명하시오. [10점]

(2) 문제 (1)의 두 함수 f와 F에 대하여 f에 F를 대응시키는 함수 $T: B \to B$를 생각할 수 있다. 함수 T에 대하여 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ \cdots \circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 집합 B의 원소 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a, b, c에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[1-3] (1) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}(ax+b, cx+d)$ (단, $a<c$)에 대하여 $F(m)$이 존재하는 m의 범위를 찾고, $F(m)$을 a, b, c, d와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(2) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(\frac{a+b}{2}x-\frac{ab}{2}, \frac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a<b$)라 하자. 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 존재함을 보이고, $F(m)$을 a, b와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 집합 U의 원소 f에 대응하는 F가 집합 U의 원소라면 $T(f)=F$라 하고, 이 과정을 k번 반복할 수 있는 경우 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ \cdots \circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(6x-10, \frac{1}{2}x^2\right)$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}f_n(3^n)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오. [10점]

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY

[문제2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 수많은 별들이 모여 있는 집합체를 은하라고 한다. 태양이 속해 있는 은하를 우리은하라고 부르며, 우리은하 밖에는 우리은하처럼 수많은 별이 밀집한 은하들이 무수히 많이 있는데, 이러한 은하를 외부 은하라고 한다. 제2의 지구를 탐사하기 위하여, 지구에서 망원경을 사용하여 외부 은하들과 별들을 관측하였다. 외부 은하들의 스펙트럼을 조사해 보니, 관측한 파장이 좀 더 긴 쪽으로 치우쳐 관찰되는 적색편이 현상이 [표 1]과 같이 나타났다. 우주의 어느 곳에서 관측해도 똑같이 나타나는 적색편이 현상은 외부 은하들의 상대속도와 관련되어 있다.

[표 1] 외부 은하들의 자료

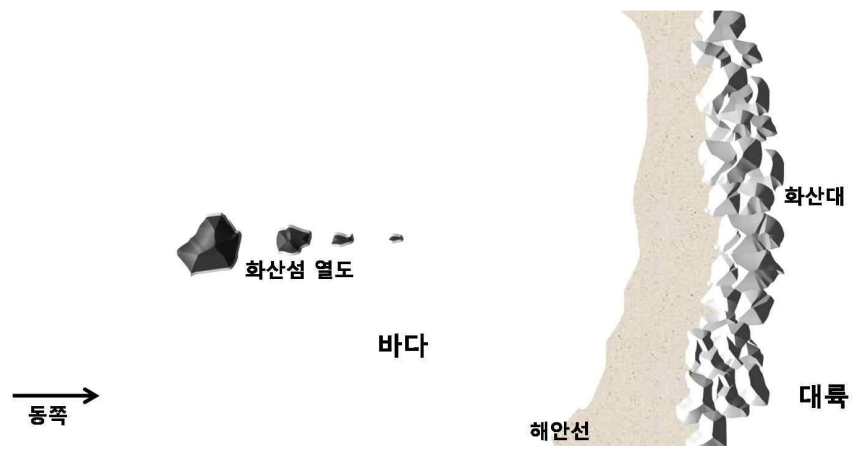
은하 번호	은하까지의 거리(Mpc)	적색편이 양(z)
1	422	0.10
2	1055	0.25
3	2110	0.50
4	4220	1.00

(나) 관측한 별들 중에서 A라는 별을 선택하여 순식간에 이동할 수 있는 우주선을 보냈다. 우주선이 A별 근처에 도달하여 보니 그 별 주위로 여러 개의 행성들이 궤도 운동을 하고 있었다. 이미 우리는 케플러의 업적을 통해 태양계에서의 행성 운동(공전)에 관한 법칙들을 알고 있다. 조화의 법칙(케플러 제3법칙)은 행성의 공전주기와 태양과 행성 사이의 거리와의 관계를 알려준다. 이 조화의 법칙에서 사용되는 비례상수(k)는 $k=4\pi^2/\mu$ 이고, 여기서 μ 는 $\mathrm{km}^3/\mathrm{sec}^2$ 의 단위를 갖는 천체의 질량에 관련된 비례상수이다. 케플러의 법칙들은 중력으로 묶여있는 모든 천체에 적용할 수 있으며, 뉴턴이 만유인력의 법칙을 정리하는 기초가 되었다. 케플러의 법칙들과 뉴턴의 운동 법칙을 조합하면, 원 궤도에서의 공전 속도 v 와 공전 궤도 반지름 a 는 $v^2=\mu/a$ 의 관계를 갖는다.

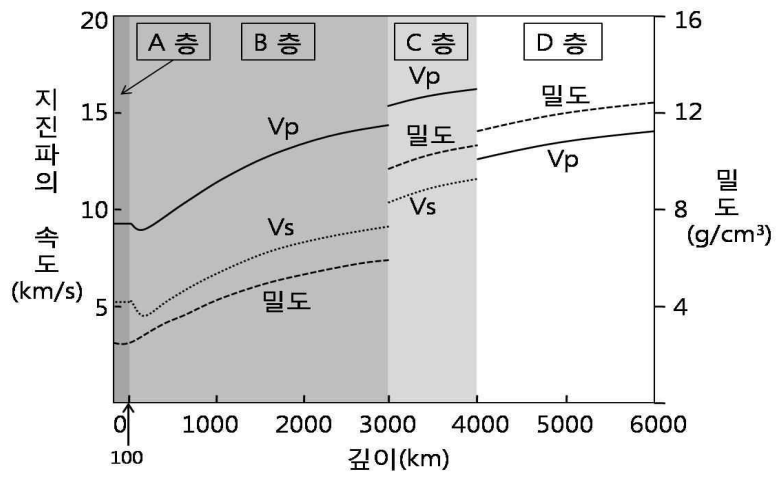
(다) A별의 행성들을 조사한 우주선은 B라는 행성을 선택하여 날아갔다. 우주선은 B행성 주위의 원 궤도에 머무르면서, B행성이 지구와는 반대로 동쪽에서 서쪽으로 자전하고 있다는 것을 알아냈다. 우주선에서 나온 두 척의 탐사선이 B행성의 대기를 통과하여 각각 대륙과 해양을 탐사하기 시작하였다. 탐사선들은 B행성의 대기를 통과하여 내려오면서 대류층을 발견하였으며, 지표 근처에서 고기압성 경도풍을 겪으면서 남반구에 착륙하였다. 해양 탐사선은 B행성의 바다가 지구의 바다와 마찬가지로 물로 이루어진 것을 확인하였고, B행성의 바다에 진입하여 해수의 흐름을 관측했다.

(라) 대륙 탐사선의 관찰로부터 B행성의 대륙에는 성층형 화산대가 해안선과 평행하게 발달해 있으며, 인접한 바다에는 순상형 화산섬 열도가 동서 방향으로 [그림 1]과 같이 형성되어 있는 것을 확인하였다. 탐사선에서 나온 로봇이 대륙의 화산대를 따라 채취한 안산암질 암석으로부터 방사성 동위원소의 양을 측정했을 때, 모원소에 대한 자원소의 비율이 일정하게 관찰되었다. 또한 화산섬 열도의 현무암질 암석에서 방사성 동위원소의 양을 측정했을 때에는 동쪽의 암석으로 갈수록 모원소에 대한 자원소의 비율이 점진적으로 증가함을 확인하였다.

(마) 로봇은 지표의 다양한 위치에서 지진파를 관측하여 [그림 2]와 같이 깊이에 따른 지진파 속도와 밀도의 변화 곡선을 구하였다. 이때 지진파 중 P-파의 속도(Vp)는 매질의 부피와 모양의 변화에 의해 바뀌고, S-파의 속도(Vs)는 매질의 모양 변화에 의해 바뀐다고 하자. 또한 로봇은 깊이에 따른 온도 변화가 지구와 비슷하다는 것을 알아냈다.



[그림 1] B행성의 지표 환경



[그림 2] B행성 내부의 지진파 속도 및 밀도 변화

[2-1] 제시문 (가)를 참고하여, 외부 은하들의 거리와 속도에는 어떠한 관계가 있는지 정량적으로 기술하고 그 의미를 설명하시오. 이를 바탕으로 우주의 나이와 크기를 추정하시오. 단, 빛의 속도는 $c\approx 3\times 10^5\ \mathrm{km/sec}$ 이고, $1\mathrm{pc}(\text{파섹})\approx 3.086\times 10^{13}\ \mathrm{km}$ 이다. [8점]

[2-2] 제시문 (나)를 참고하여, 우주선이 B행성 주위에서 p초(sec)의 공전주기를 가진 원 궤도를 돌도록 하기 위해서는 B행성의 중심과 우주선 사이의 거리가 얼마나 되어야 하는지 서술하시오. 그리고 그 원 궤도로 돌기 위한 초기 속도의 크기를 설명하고, 그 방향에 대해서 만유인력과 연관하여 논하시오. [8점]

[2-3] 제시문 (다)에서 해양 탐사선이 겪었던 경도풍과 해수의 흐름에 대한 원리를 각각 설명하고 그 공통점을 논하시오. [8점]

[2-4] 제시문 (라)를 참고하여, [그림 1]에서 관찰된 다양한 화산의 형성 과정에 대하여 설명하고, 해양 탐사선이 발견하게 될 해저 지각 구조의 특징을 추정하시오. [8점]

[2-5] 제시문 (마)를 참고하여, [그림 2]의 지진파 속도 및 밀도 변화의 특징을 설명하고, B행성의 내부 층상 구조에 대하여 논하시오. 이러한 층상 구조가 B행성의 대기와 해양의 형성, 그리고 지각의 지질 현상과 어떠한 관계가 있을지 추론하시오. [8점]

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY