2014학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제(수학, 화학)

모집단위		수험번호		성 명	

[문제1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

17세기에 라이프니츠는 두 양 사이의 대응 관계를 명확히 하고자 함수의 개념을 처음 도입하였다. 그 이후 많은 변화를 거쳐 함수의 개념은 일반화 되었으며 다양한 대응관계를 표현하는 도구로 활용되고 있다. 현대에는 함수를 수가 아닌 대상에도 적용하여 사용하고 있다.

(가) 실수 전체의 집합을 R라 하고, 집합 $U=\{f \mid f:R\to R\}$라 하자. 즉, 집합 U는 집합 R에서 집합 R로 가는 모든 함수의 모임이다. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B를

$$A=\{f \mid f\in U,\ f(x)=ax+b,\ a,b\in R\},$$
$$B=\{f \mid f\in U,\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in R,\ a>0\}$$

라 하자.

(나) 함수 $f\in U$ 대하여 $mx-f(x)$가 최댓값을 가지면 그 값을 $F(m)$이라 하자.

(다) 두 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{Max}(a,b)=\begin{cases}a & (a\geq b)\\ b & (a<b)\end{cases}$ 이다.

※ 다음 모든 문제에서 사용되는 f와 F는 제시문 (나)에서 주어진 관계를 만족한다.

[1-1] 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선을 l이라 할 때, 직선 l의 y절편이 $-F(m)$임을 설명하시오. [10점]

[1-2] (1) 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 집합 B의 원소일 때, 모든 실수 m에 대하여 $F(m)=pm^2+qm+r$로 나타낼 수 있으므로 함수 $F(x)$도 집합 B의 원소임을 설명하시오. [10점]

(2) 문제 (1)의 두 함수 f와 F에 대하여 f에 F를 대응시키는 함수 $T:B\to B$를 생각할 수 있다. 함수 T에 대하여 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 집합 B의 원소 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{1}{n}f_k\left(\frac{k}{2n}\right)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 극한값을 a, b, c에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

[1-3] (1) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}(ax+b, cx+d)$ (단, $a<c$)에 대하여 $F(m)$이 존재하는 m의 범위를 찾고, $F(m)$을 a, b, c, d와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(2) 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(\frac{a+b}{2}x-\frac{ab}{2}, \frac{1}{2}x^2\right)$ (단, $a<b$)라 하자. 모든 실수 m에 대하여 $F(m)$이 존재함을 보이고, $F(m)$을 a, b와 m에 대한 식으로 나타내시오. [10점]

(3) 집합 U의 원소 f에 대응하는 F가 집합 U의 원소라면 $T(f)=F$라 하고, 이 과정을 k번 반복할 수 있는 경우 $f_k=(\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{k\text{개}})(f)$ $(k=1,2,3,\cdots)$으로 정의하자. 함수 $f(x)=\mathrm{Max}\left(6x-10, \frac{1}{2}x^2\right)$에 대하여 무한급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}f_n(3^n)$의 수렴 여부를 논하고, 수렴하면 그 값을 구하시오. [10점]

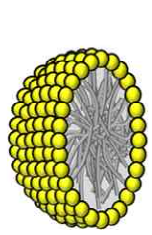
연세대학교 YONSEI UNIVERSITY

[문제2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

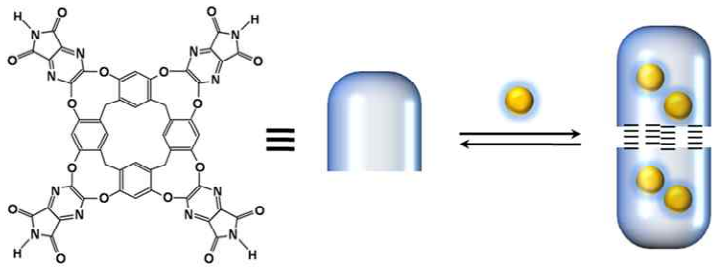
(가) 자기조립(self-assembly)은 무질서한 배열의 분자들이 수소결합, 쌍극자 상호작용, 분산력과 같은 분자 간의 상호작용에 의해 조직적인 구조나 형태가 자발적으로 만들어지는 과정이다. 생명체는 여러 단계의 자기조립 과정을 통하여 고도로 조직화된 세포, 조직, 장기 등을 만든다. 자기조립에 대한 연구는 생명체에서 일어나는 복잡한 화학 현상의 이해에 도움을 주며 나노 구조의 제어를 가능하게 해 각종 기능성 재료의 설계에 응용된다.

(나) 마이셀은 친수성 머리 부분과 소수성 꼬리로 구성된 계면활성제가 모인 분자집합체이다. 계면활성제가 물속에서 일정 농도 이상이 되면 그림 1과 같이 소수성 꼬리부분이 중심부를 향하고 친수성 머리 부분은 물과 닿는 표면을 형성한다. 계면활성제를 이용하면 물에 잘 녹기 어려운 소수성 분자들을 마이셀 내부에 가두어 물속에 분산시킬 수 있다.

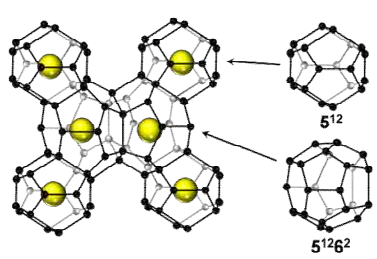
(다) 분자캡슐(molecular capsule)은 2개 이상의 분자가 자기조립해서 만들어지며, 내부에 작은 크기의 분자를 가둘 수 있는 공간(cavity)을 가진 거대분자체이다. 그림 2는 수소결합을 이용하여 분자캡슐을 만드는 대표적인 분자의 예이다. 분자캡슐은 비교적 약한 분자 간의 힘을 이용해 만들어지며 내부에 게스트(guest) 분자가 포함될 경우 캡슐의 구조를 더 안정하게 유지하는 경우가 있다. 분자캡슐은 대부분 비교적 약한 분자간의 힘으로 만들어지기 때문에, 환경에 따라 게스트 분자의 출입을 자유롭게 조절할 수 있다. 캡슐 내부에 존재하는 게스트 분자는 외부환경으로부터 고립되기 때문에 독특한 물리적·화학적 특성을 나타내는 경우도 있다.



[그림 1] 마이셀

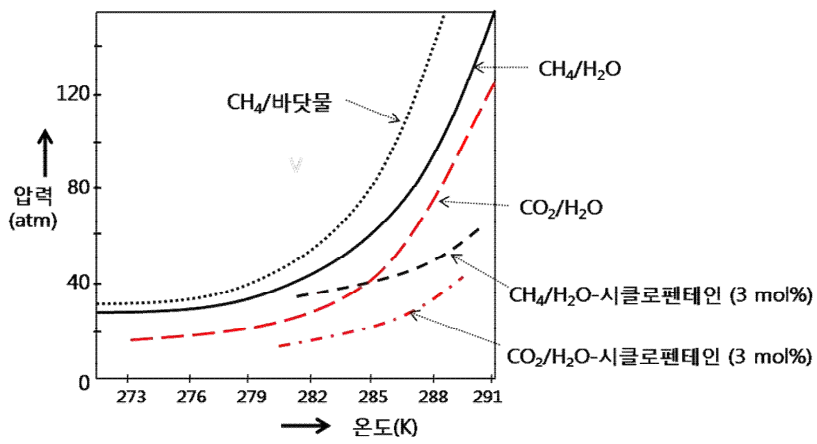


[그림 2] 분자캡슐



[그림 3] 메테인 하이드레이트

(라) 가스 하이드레이트(gas hydrate)는 가스 분자들이 물분자로 이루어진 결정 속에 갇혀 있는 구조이며 높은 압력에서 생성된다. 불타는 얼음으로 잘 알려진 메테인 하이드레이트(methane hydrate)는 대표적인 가스 하이드레이트 중의 하나이다. 메테인 하이드레이트의 일반 구조식은 $(CH_4)(H_2O)_n$로 주어지며, 그림 3은 메테인 하이드레이트의 대표적인 구조의 일부를 표시한 것이다. 모퉁이에 존재하는 4개의 구조는 정12면체로 (정5각형 12개로 구성= $\mathbf{5^{12}}$로 표시) 각 꼭짓점에는 산소 원자가 있고 이들 결정구조 안에 메테인 분자가 갇혀 있다. 가운데 2개의 구조는 14면체로 (정5각형 12개 + 정6각형 2개로 구성 = $\mathbf{5^{12}6^2}$) 마주보는 두 개의 면은 6각형이고 나머지는 5각형 구조이다. 이 외에도 메테인 하이드레이트에는 $\mathbf{5^{12}6^4}$나 $\mathbf{5^{12}6^8}$와 같이 더 큰 공간을 갖는 구조가 혼합된 형태로 존재한다. 그림 4는 다양한 조건에서 가스 하이드레이트가 만들어지는 가상의 상평형 그림이다.



[그림 4] 가스 하이드레이트의 상평형

[2-1] 그림 1의 마이셀은 물속에서 자발적으로 생성되는 반면, 그림 2의 분자캡슐은 물에서는 만들어지기 어려우며 극성이 낮은 유기용매에서는 잘 만들어진다. 이러한 점을 고려하여 그림 1, 2, 3에서 제시된 각 자기조립체의 형성 과정에서 작용하는 주된 분자 간의 힘을 기술하고, 분자 간의 힘에 영향을 줄 수 있는 외부 요인을 설명하시오. [8점]

[2-2] 메테인 하이드레이트에서 메테인 가스를 얻을 수 있는 방법과 그 이유를 4가지 이상 제안하고, 메테인 하이드레이트로부터 메테인 가스를 얻을 때 발생되는 문제점을 기술하시오. [8점]

[2-3] 다음은 메테인 하이드레이트 결정이 만들어지는 가상의 평형 반응식이다.

$$CH_4\,(g) + 6H_2O\,(l) \rightleftharpoons (CH_4)(H_2O)_6(s)$$

위 반응평형을 통해서 형성된 다량의 메테인 하이드레이트가 수심 1000 m의 해저에서 발견되었다. 발견된 메테인 하이드레이트 1 L를 채취하여 0 °C, 1 atm에서 분해했을 때, 168 L의 메테인 가스를 얻었다. 그림 4의 조건과 채취된 메테인 하이드레이트의 밀도를 참조하여 수심 1000 m 해저에서 메테인 하이드레이트가 안정적으로 존재할 수 있는 환경에 대해서 논하시오. (단, 메테인 가스는 주어진 조건에서 이상기체이며, H, C, O의 원자량은 각각 1, 12, 16 이다. 그리고 수심 1000 m에서 바닷물의 밀도는 1.028 g/mL이며, 압력은 100 atm이라고 가정하자. 기체상수 R = 0.082 atm·L/mol·K) [8점]

[2-4] 가스 하이드레이트의 응용 분야 중의 하나로 해수 담수화와 관련된 연구가 진행되고 있다. 그림 4에서 제시된 상평형을 이용하여 12 °C의 해수를 담수화하기 위한 가장 효율적인 조건과 담수화 과정을 설명하시오. 제안한 조건에서 담수화가 가장 효과적으로 이루어질 수 있는 이유를 제시문 (다)를 참고하여 설명하시오. (단, 담수화 과정에서 온도는 일정하다고 가정하자.) [8점]

[2-5] 물질이 용해되는 과정은 분자 간의 상호작용으로 해석할 수 있다. 즉, 용질분자 간의 인력과 용매분자 간의 인력의 합에 비해 용매분자와 용질분자 간의 인력이 클 경우, 그 물질은 더 잘 용해될 수 있다. 메테인 가스의 경우 물에 대한 용해도는 매우 낮지만, 메테인 가스와 물을 혼합한 상태에서 일정 이상의 압력을 가했을 때 자발적으로 메테인 하이드레이트를 생성하게 된다. 이러한 과정을 엔탈피(ΔH)와 엔트로피(ΔS) 및 자유에너지(ΔG)의 변화와 연관시켜 설명하시오. 그리고 바닷물에서 메테인 하이드레이트를 만들기 위해서는 동일한 압력에서 순수한 물을 이용할 때보다 더 낮은 온도가 필요한 이유에 대해서 설명하시오. (단, $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$) [8점]

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY