2013학년도 연세대학교 수시모집 논술(자연계열) 입학시험 문제지

모집단위		수험번호		성명	

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 양의 정수 n에 대하여 정의역과 공역을 $\{0,1,\cdots,2n\}$로 하는 일대일 대응을 모두 모은 집합을 S라 하고 그 원소를 중복 없이 나열하여 $S=\{f_1,\cdots,f_N\}$이라 하자. 이 때, 1과 N 사이의 자연수 j에 대하여 집합 A_j와 B_j를

$$A_j=\{i \mid f_j(i)<f_j(0),\ 1\le i\le n\},\quad B_j=\{i \mid f_j(i)<f_j(0),\ n+1\le i\le 2n\}$$

라 하고 a_j와 b_j를 각각 집합 A_j와 B_j의 원소의 개수라 하자. 또한, 집합 D_k와 E_k를

$$D_k=\{f_j \mid f_j\in S,\ a_j=k\},\quad E_k=\{f_j \mid f_j\in S,\ b_j=k\}$$

라 하자.

(나) $2n$명의 사람 중에서 k명을 뽑았다고 하자. 이 때, $2n$명의 사람이 n쌍의 부부로 이루어졌다고 가정하면, $2n$명 중 뽑힌 사람 수 k는 부부가 모두 뽑힌 쌍의 수의 2배와 부부 중 한 명만이 뽑힌 쌍의 수의 총합으로 생각할 수 있다.

[1-1] 아래의 논제에 답하시오. [10점]
(1) 집합 S의 원소의 개수 N을 구하는 방법을 설명하시오.
(2) 표본공간 S의 각 원소 f_j에 값 a_j를 대응시키는 확률변수 X를 생각하자. $n=3$ 일 때, 확률 $P(X=1)$을 구하는 방법을 설명하시오.

[1-2] $n=3$ 이라 할 때, 아래의 논제에 답하시오. [20점]
(1) 집합 $D_1\cap E_1$과 $D_1\cap E_3$의 원소의 개수를 구하는 방법을 설명하시오.
(2) 위에서 구한 두 집합의 원소의 개수가 같은지 다른지 판단하고 그 이유를 논하시오.
(3) 집합 D_k와 E_k를 표본공간 S의 사건으로 생각할 때, 두 사건 D_1과 E_1이 서로 독립인지 판단하고 그 이유를 설명하시오.

[1-3] 다음 등식

$${}_{2n}C_k=\sum_{i=0}^{\boxed{(가)}}\left({}_nC_i\times {}_{n-i}C_{\boxed{(나)}}\times 2^{\boxed{(다)}}\right)$$

이 성립하도록 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구하고 그 이유를 설명하시오. [15점]

[1-4] 다항함수 $g(x)=\sum_{j=1}^{N}(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}$를 생각하자. 닫힌 구간 $[-1,1]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값을 구하고, 그 값이 최대인 이유를 설명하시오. [15점]

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 아래 질문에 답하시오.

(가) 태양계의 기원에 대한 가설 중 널리 인정되고 있는 이론에 따르면 대폭발로부터 나온 수소와 헬륨 등을 포함한 물질들이 응축되면서 처음으로 별과 은하계가 만들어졌으며, 이들 은하계 중의 하나로 태양계가 속한 우리은하가 탄생하였다.

(나) 성운설에 따르면 거대한 먼지와 기체들이 회전하면서 형성된 원반모양의 중심부에 원시태양이 만들어졌다. 원시태양이 만들어진 후 비교적 짧은 시간에 성운 내부의 온도가 현저히 낮아짐에 따라, 용융점이 높은 물질들이 응축하여 모래알 크기의 입자들이 뭉쳐진 미행성이 만들어졌다. 이들 미행성들이 충돌하여 소행성 정도의 크기가 되면 인력에 의해 주위의 수소와 헬륨을 끌어당겨 대기를 형성하게 되는데 이 단계까지 성장한 천체를 원시행성이라고 한다. 두 미행성의 충돌에 의한 원시행성의 형성과정을 이해하기 위한 가상실험을 위해 다음과 같이 가정하였다. (1) 질량이 6.0×10^4kg, 속력이 4.0×10^3m/s인 미행성A와 질량이 4.0×10^4kg, 속력이 8.0×10^3m/s인 미행성B가 충돌 전 일직선상에서 같은 방향으로 운동한다. (2) 두 미행성이 충돌한 후에는 같은 속도로 운동한다. (3) 충돌에 의한 힘이 작용한 시간은 0.10초이다. (4) 충돌 전과 충돌 후의 총 질량은 변하지 않는다.

(다) 철보다 원자번호가 작은 원소들의 형성은 태양계의 형성 과정에서 발생한 핵융합 반응으로, 철보다 원자번호가 큰 원소들의 형성은 초신성의 폭발로 설명할 수 있다. 이러한 원소의 성질을 규명하기 위한 실험에는 방사광가속기, 중이온가속기, 양성자가속기 등이 이용되는데, 이 중에서 유럽입자물리연구소의 거대 강입자가속기는 태양계의 기원에 대한 가설을 테스트하기 위해 사용되기도 하였다. 양성자가속기에서는 두 개의 양성자를 서로 반대 방향으로 가속시켜 충돌시킨다. 이때 생기는 파편들 가운데 우주의 근본입자가 발견되기를 기대하였다. 가상 충돌실험을 위해 주어진 가정들은 다음과 같다. (1) 두 양성자는 가속기에서 충돌하는 순간 일직선상에서 정면으로 충돌한다. (2) 두 양성자가 충돌한 후 만들어지는 파편들 또한 동일한 직선상에서 운동한다. (3) 충돌 전 각 양성자의 질량은 1.5×10^{-27}kg이고, 속력은 2.0×10^8m/s이다. (4) 충돌실험 과정에 외부에서 유입되거나 외부로 방출된 에너지는 없다. (5) 질량은 속도와 무관하게 일정하다. (6) 운동량은 속도에 비례한다. (7) 운동에너지는 속력의 제곱에 비례한다.

(라) 달은 지구에서 가장 가까이 위치해 있기 때문에 가장 먼저 탐사가 이루어졌고, 결국 1969년 아폴로 우주선을 이용해 인간이 달에 처음으로 착륙하게 되었다. 달의 표면에서 가장 두드러진 지형은 바로 운석의 충돌에 의해 생긴 것으로 생각되는 운석구덩이다. 운석구덩이 가운데 규모가 비교적 큰 구덩이들이 형성되는 것은 오늘날에 비하여 태양계 역사의 초기에 훨씬 흔한 일이었다. 달의 표면에 운석구덩이를 형성한 운석의 충돌을 이해하기 위한 가상실험을 위해 다음과 같이 가정하였다. (1) 충돌 전 운석의 질량은 2.0×10^6kg, 속력은 6.0×10^3m/s이다. (2) 운석과 달의 충돌 시 둘의 접촉면에서 운석의 역학적 에너지가 일부 손실된다. (3) 단위시간 당 손실되는 운석의 역학적 에너지는 접촉면의 면적에 비례하고, 충돌 부위에서 발생하는 압력에 비례한다. (4) 운석과 달의 접촉면에서 단위면적(1m^2), 단위압력(1Pa), 단위시간(1초) 당 손실되는 운석의 역학적 에너지는 6.0×10^2J로 한다. (5) 달은 계속 정지한 것으로 가정한다. (6) 운석은 달에 수직으로 충돌하며, 충돌한 반대방향으로 되돌아 나온다. (7) 운석은 달의 중력장에 의해 가속되지 않는다. (8) 충돌 전과 충돌 후 운석의 질량은 같다.

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY

(마) 화석연료의 사용으로 발생한 대기 중 이산화탄소는 지구온난화와 같은 환경문제를 야기한다. 이산화탄소를 효과적으로 저장하는 기술은 환경오염을 줄이고 이산화탄소를 친환경적으로 재사용하기 위한 중요한 기술이다. 이산화탄소를 저장하는 대표적인 방법으로는 다공성 물질 내부에 저장하는 방법과 탄산염광물 형태로 저장하는 방법이 있다. 다공성 물질을 이용하는 이산화탄소 저장기술의 핵심은 선택적인 포집과 우수한 포집용량을 가지는 물질의 개발에 있다. 특히, 금속이온과 유기분자를 이용한 다공성물질(metal-organic framework, MOF)은 다양한 크기의 내부구멍과 여러 작용기를 도입할 수 있는 장점이 있다. 그림 1은 금속이온과 유기분자를 이용한 MOF의 일반적인 구조로, 금속이온과 유기분자의 종류에 따라 MOF의 특성이 달라진다. 여기서 유기분자의 기본구조는 $^{-}$OOC-방향족탄화수소-COO^{-} 이다. 그림 2는 방향족탄화수소 부분에 곁가지로 여분의 작용기(아민기, 카르복시기 등을 '작용기'라 함)를 도입해 만든 MOF를 이용해 고체상에서 기체 포집 실험을 수행한 결과이다. (단, 모든 실험은 수분이 없는 조건에서 진행했다.)

(바) 이산화탄소는 광물화과정을 거쳐 고체상태의 탄산염광물 형태로 영구적으로 저장할 수 있지만, 이러한 광물화과정은 매우 느려 수백~수천 년이 걸린다. 암석에 있는 미생물이 이산화탄소의 광물화과정을 촉진할 수 있다는 증거를 제시한 실험결과가 있다. 일련의 실험내용은 다음과 같다.

① 세균(대장균, 남세균 등)이 있는 염화칼슘($CaCl_2$) 수용액에 과량의 이산화탄소 기체를 주입할 경우, 세균이 없는 경우보다 탄산칼슘($CaCO_3$) 결정의 형성과 성장 속도가 세균의 밀도에 비례해서 증가했다. (이 때, 탄산칼슘 결정 형성에 필요한 충분한 양의 탄산이온(CO_3^{2-})이 공급된다고 가정한다. 탄산칼슘 결정화 반응식은 $Ca^{2+} + CO_3^{2-} \rightarrow CaCO_3$ 이다.)

② 인지질로 이루어진 세포막에 박혀있으며, 일부분은 세포 밖으로 노출된 어떤 막단백질의 노출 부위에 한 가지 아미노산이 6번 연속으로 반복되어 나열되도록 유전자 재조합 실험을 통해 단백질을 변형시켰다. 그 결과, 이 재조합 단백질을 가진 세균이 ①의 원래 세균보다 탄산칼슘 결정의 형성을 현저하게 촉진한다는 사실을 확인했다.

(사) 세포에서 단백질(폴리펩티드)을 형성하는 데 사용되는 20가지의 아미노산은 그림 3과 같다. 아미노산의 기본구조(박스 안의 그림)는 중심탄소에 아민기(-NH_2), 카르복시기(-COOH), 곁가지(R 부분)가 결합된 형태이다. R 부분의 구성에 따라 아미노산의 종류가 달라진다. 단백질의 3차원적 구조, 화학적 성질 및 세포에서의 위치는 구성 아미노산들에 의해서 결정된다.

(아) 천연 아미노산인 α-아미노산은 아민기와 카르복시기가 같은 탄소에 위치한다. 천연 아미노산이 가지지 못하는 새로운 구조적, 기능적 특성을 부여하기 위해 다양한 구조의 비천연 아미노산이 개발되고 있다. 이들 중 β-아미노산은 구조적으로 α-아미노산과 유사하지만 아민기와 카르복시기 사이에 탄소(-CH_2-)가 하나 더 첨가된 구조이다.

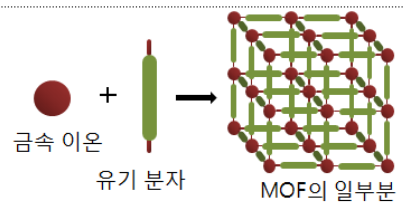


그림 1. MOF의 일반적인 구조

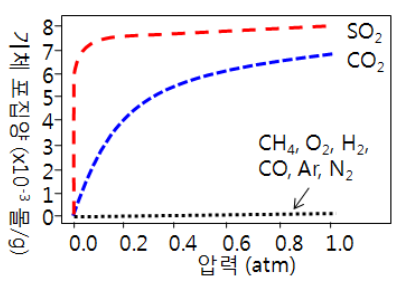


그림 2. MOF를 이용한 기체 포집 실험

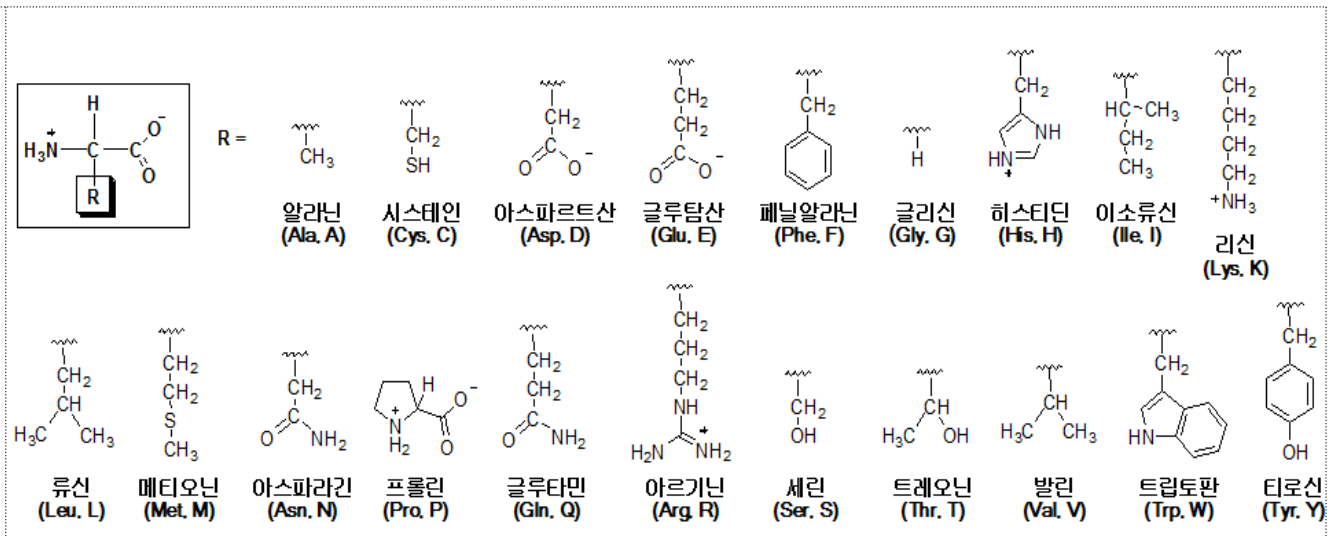


그림 3. 20 가지 천연 α-아미노산 구조와 명칭(약자표기)

[2-1] 제시문 (가), (나), (다), (라)를 읽고 아래 질문에 답하시오. [20점]

(1) 제시문 (나)의 미행성충돌 가상실험에서 미행성A에 작용한 힘의 평균 일률과 미행성B에 작용한 힘의 평균 일률을 정량적으로 논하시오.

(2) 제시문 (다)의 가속기를 이용한 양성자 충돌 가상실험에서, 두 양성자가 충돌하는 순간 한 덩어리가 되었다가 각각 1.3×10^{-27}kg, 1.2×10^{-27}kg, 3.0×10^{-28}kg, 2.0×10^{-28}kg의 질량을 갖는 4개의 파편으로 나누어지는 것이 관찰되었다. 이 가운데 1.2×10^{-27}kg의 파편이 가질 수 있는 최대속력을 구하고, 그 값이 최대인 이유를 설명하시오.

(3) 제시문 (라)의 운석충돌을 이해하기 위한 가상실험에서 운석이 달과 충돌한 후 되돌아 나올 때 운석의 속력 및 운석의 역학적 에너지의 총 손실량에 대해 정량적으로 설명하시오.

[2-2] 제시문 (마), (바), (사), (아)를 읽고 아래 질문에 답하시오. [20점]

(1) 제시문 (마)에서 일반적인 MOF의 기체 포집용량을 증가시키기 위한 방법을 모두 제시하시오. 또한, 그림 2의 실험 결과를 바탕으로 이 실험에서 사용한 MOF가 가지고 있을 것으로 예상되는 작용기를 제안하고, 기체에 따라 포집력이 차이가 나는 이유를 도입한 작용기와 기체 분자간에 작용하는 힘을 사용하여 설명하시오. (단, 화학결합의 극성은 두 원자의 전기음성도 차이가 클수록 커진다.)

(2) 펩티드 조각 1-XXXXXX-펩티드 조각 2 은 제시문 (바)에서 연구진이 시도한 막단백질의 아미노산 서열이다. 6번 연속(-XXXXXX-)으로 반복해서 도입한 최적의 아미노산 X를 유추하고, 해당 아미노산을 선택한 이유를 제시문 (사)에 있는 정보를 이용하여 설명하시오. 또한, 보기 a)-e) 중에서 펩티드 조각 1과 펩티드 조각 2 부분에 가장 적합한 아미노산 서열을 고르고, 그 이유를 설명하시오.

(보기)
a) -G-G-K-L-S-K-K-K-K-G-Y-N-V-N-D-E-K-A-K-
b) -G-H-A-A-F-L-L-G-C-G-Y-A-F-G-I-S-F-G-H-
c) -K-D-K-K-A-E-G-A-A-T-E-E-E-G-T-P-K-E-S-
d) -S-E-E-E-R-L-K-L-A-Q-Q-Q-A-A-L-L-M-Q-Q-
e) -E-R-A-K-Q-Q-G-D-H-S-L-K-E-H-E-L-L-E-Q-

(3) 위에서 디자인한 폴리펩티드(펩티드 조각 1-XXXXXX-펩티드 조각 2)에서 6개의 아미노산 X 대신에 제시문 (아)에서 설명한 비천연 β-아미노산 X'을 사용해서 새로운 폴리펩티드(펩티드 조각 1-X'X'X'X'X'X'-펩티드 조각 2)를 만들었다. 이 때, 사용한 비천연 β-아미노산 X'의 곁가지(R)는 천연 α-아미노산 X의 곁가지(R)와 동일하다. 새로운 폴리펩티드와 기존 폴리펩티드의 구조적인 차이점에 기초하여, 탄산칼슘의 광물화과정에서 어떤 폴리펩티드가 더 효과적인지 유추하시오.

연세대학교 YONSEI UNIVERSITY