논 술 (자연 B)

※주의사항 : 논제 1은 필수로 풀고 논제 2, 3 중 한 문제를 선택해서 답안을 작성하시오.

논제 1: 수학 (필수)

(가)

임의의 양의 유리수 r에 대하여 $r=\frac{q}{p}$를 만족하고 서로소인 자연수의 순서쌍 (p,q)는 유일하다. 이 때 분모 p를 $d(r)$로 나타내기로 하자. 예를 들어, $d\left(\frac{2}{3}\right)=3$, $d\left(\frac{6}{8}\right)=4$, $d(0.8)=5$ 이다.

(나)

다음 성질을 만족하는 모든 수열 $\{a_n\}$들의 집합을 S라 하자.

(i) 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 0과 1사이의 유리수이다.

(ii) 자연수 m, n에 대하여 $m\neq n$이면 $a_m\neq a_n$이다.

제시문 (가)와 (나)를 읽고 다음 물음에 답하시오.

(a) 수열 $\{a_n\}$이 S에 속할 때, 집합 $\{n|d(a_n)=10\}$의 원소의 개수는 최대 몇 개인가?

(b) r이 양의 유리수이고 $b_n=d(2nr)$이라 하자. n이 무한대로 갈 때 수열 $\{b_n\}$이 수렴할 r의 조건을 찾으시오.

(c) p와 q는 서로소인 자연수이고, f는 주기가 p인 주기함수일 때

$$\sum_{k=1}^{p} f(k)=\sum_{k=1}^{p} f(kq)$$

가 성립함을 설명하시오.

(d) $a_n=\frac{n}{3n+10}$이고 $g(x)=\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)^{10}$일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d(a_n)}\sum_{k=1}^{d(a_n)} g(ka_n)$을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

논제 2: 물리 (선택)

(가)

그림 1과 같이 용수철 한쪽 끝은 벽에 고정되어 있고 용수철의 다른 쪽 끝은 전기저항이 R, 질량이 m인 물체에 고정되어 있다. 전기저항과 질량을 무시할 수 있는 도선으로 한 변의 길이가 d인 정사각형 고리를 만들어 그 물체의 양쪽 끝에 연결한다. 이때 물체의 평형 지점의 수평방향 좌표를 $x=0$이라 하자. $x \geq L$인 영역에 고리 면에 수직으로 들어가는 방향의 자기장이 있고, 그 크기 $B(x)$는 $B(L)=B_0$과 $B\left(\frac{3}{2}L\right)=2B_0$을 만족하는 일차함수이다. 도선이 자기장에 의하여 받게 되는 힘은 물체가 용수철에 의해 받는 힘에 비해 매우 작아서 물체는 수평 방향으로 단진동을 한다고 가정하자. 시간 $t=0$일 때, 물체는 평형 지점으로부터 왼쪽으로 $\frac{L}{2}$ 만큼 떨어진 지점에서 초기 속력 0으로 운동을 시작한다. 용수철 상수는 k이고 정사각형 고리의 한 변의 길이는 $d=\frac{3}{4}L$이다. 중력의 효과는 무시한다.

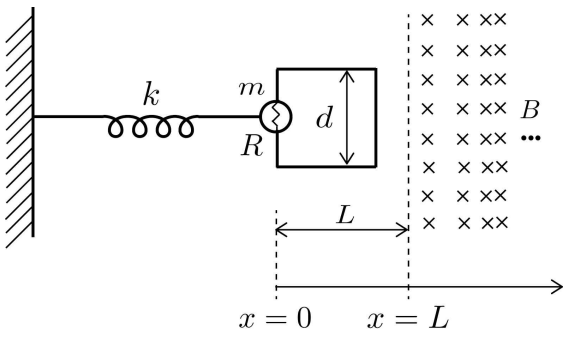


그림 1.

(나)

그림 2와 같이 질량 m인 물체가 지표면에서 각도 θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$, 초기 속력 v_0으로 2차원 운동을 한다. 이 물체 위치로부터 수평 거리 $L>0$, 높이 h인 지점에서 질량 M인 물체가 역시 초기 속력 v_0으로 아래쪽 방향으로 떨어진다. 중력 가속도는 g이고 두 물체는 동시에 운동을 시작한다. 공기에 의한 영향 및 두 물체의 크기는 무시하고, 질량 M인 물체는 지표면에 부딪치지 않고 계속 떨어진다.

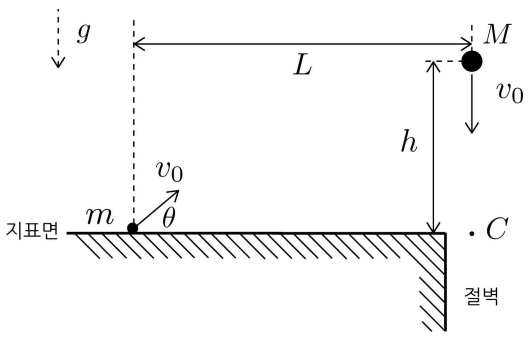


그림 2.

(a) 제시문 (가)를 읽고 임의의 시간 $t>0$에서 물체의 위치 및 진동 주기 T를 구하시오.

(b) 제시문 (가)에서 물체가 처음 한 번 진동할 동안 도선에 전류가 흐르게 되는 시간 구간을 구하시오.

(c) 제시문 (가)에서 물체가 처음 한 번 진동하는 동안 도선 고리를 통과하는 자속과 도선 양끝 전위차를 시간 t의 함수로 각각 기술하고, 도선에 흐르는 전류의 방향을 설명하시오.

(d) 제시문 (나)에서 두 물체가 지표면 높이의 지점 C에서 서로 충돌한다. 이 경우 $\frac{h}{L}$를 θ만으로 표현하시오.

논제 3: 화학 (선택)

(가)

화학 결합의 종류에는 크게 공유 결합, 이온 결합, 금속 결합 그리고 배위 결합(혹은 배위 공유 결합)이 있다. 특히 한쪽 원자가 비공유 전자쌍을 일방적으로 제공하여 이루어지는 결합을 배위 결합이라고 한다. 이러한 배위 결합은 다양한 화합물에서 발견되며, 그 중 가장 대표적인 것이 금속을 포함하는 배위 화합물들로 **착물**이라고도 한다. 대부분의 착물은 그 중심 금속 이온에 분자(CO, NH_3, H_2O, 피리딘 등) 혹은 이온(Br^-, Cl^-, H^-, CO_3^{2-}, OH^- 등)이 전자쌍을 제공하면서 이루어지는데, 용액 내에서 생성된 착물은 이온 형태나 중성 상태, 혹은 고체 상태로 존재한다. 이때 중심 금속과 배위 결합을 이루는 분자 혹은 이온들을 **리간드**라고 한다. 이러한 착물들은 다양한 종류의 구조로 존재할 수 있는데 그 중 가장 대표적인 구조가 그림 1의 팔면체와 사각평면 구조이다.

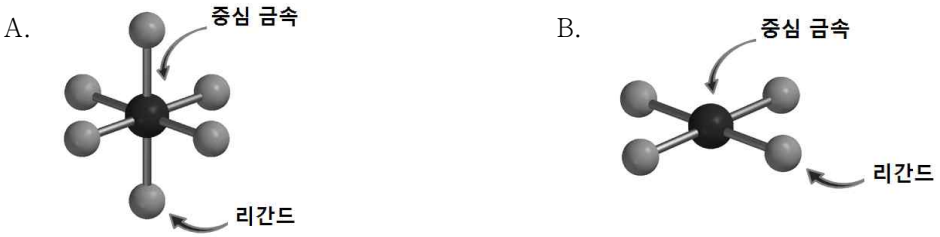


그림 1. 대표적인 착물의 구조: 팔면체(A)와 사각평면(B)

(나)

리간드는 배위 결합으로 이루어진 착물의 중심 금속 이온 주위에 결합하고 있는 분자나 이온을 의미한다. 이들이 리간드로 작용하기 위해서는 하나의 원자가 반드시 한 개 이상의 비공유 전자쌍을 가지고 있어야 하고, 이들 중 한 개의 전자쌍만 배위 결합에 참여해야 한다. 그리고 리간드는 중심 금속과 안정한 배위 결합을 하고 있기 때문에 용액 상에서 쉽게 해리되지 않는다. 특히 리간드들 가운데 중심 금속에 한 개의 배위 결합을 이루는 경우를 **한 자리 리간드**라 한다. 반면에 크기가 큰 분자들은 한 개 이상의 원자에서 배위 결합이 가능하다. 가령 에틸렌다이아민($NH_2-CH_2-CH_2-NH_2$)과 같이 두 개의 배위 결합이 가능한 리간드를 **두 자리 리간드**라 하고, 다이에틸렌트라이아민($NH_2-CH_2-CH_2-NH-CH_2-CH_2-NH_2$)과 같이 세 개의 배위결합이 가능한 리간드를 **세 자리 리간드**라 한다(그림 2). 하나의 중심 금속이 두 자리 또는 그 이상의 리간드로 배위된 착물을 **킬레이트**라고 부르는데, 이들 킬레이트는 매우 안정하다. 또한 킬레이트를 형성할 수 있는 리간드를 **킬레이트 리간드**라 하고, 킬레이트를 형성할 때 킬레이트 리간드는 중심 금속과 **고리 모양** 구조를 형성한다(그림 3).

A. $:NH_3$

암모니아 (NH_3)

B. $H_2N-CH_2-CH_2-NH_2$

에틸렌다이아민 ($NH_2-CH_2-CH_2-NH_2$)

C. $H_2N-CH_2-CH_2-NH-CH_2-CH_2-NH_2$

다이에틸렌트라이아민 ($NH_2-CH_2-CH_2-NH-CH_2-CH_2-NH_2$)

그림 2. 한 자리 리간드(A), 두 자리 리간드(B), 그리고 세 자리 리간드(C)의 예

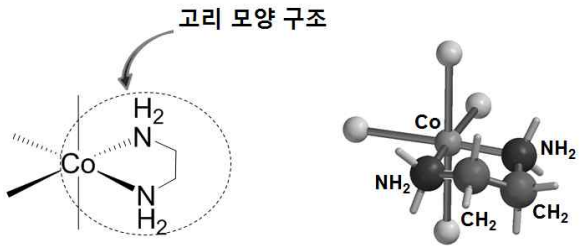


그림 3. 에틸렌다이아민과 코발트 금속으로 형성된 킬레이트

(다)

탄소 화합물과 마찬가지로 착물도 그 구조에 따라 다양한 형태의 이성질체를 갖는다. **이성질체**란 분자식은 같으나 구조식이 다른 두 가지 이상의 물질로서 구조와 물리적 성질이 서로 다른 화합물을 말한다. 특히 배위 결합을 절단하지 않고는 서로 전환되지 못하는 경우를 **기하 이성질체**라 한다. 착물에서 동종의 리간드가 인접한 방향에서 배위 결합을 하고 있는 경우를 **시스(*cis*)형**이라 하고, 중심 금속의 반대 방향으로 배위 결합을 하고 있는 경우를 **트랜스(*trans*)형**이라 한다(그림 4).

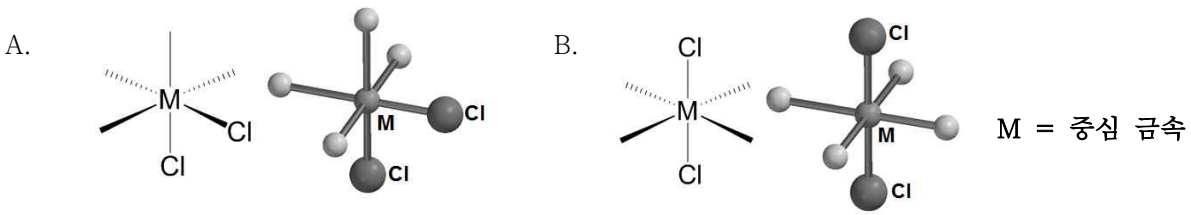


그림 4. 팔면체 구조를 가지는 착물의 기하이성질체: 시스형(A)과 트랜스형(B)

(a) Co^{3+}와 물(H_2O)이 반응하면 $Co(H_2O)_6^{3+}$를 형성한다. 제시문 (가)와 (나)를 근거로 이 반응이 루이스 산-염기 반응임을 논술하시오.

(b) 생체 내에서 대표적인 착물은 헤모글로빈이다. 헤모글로빈은 적혈구 속에서 산소와 이산화탄소를 운반하는 복합 단백질로 네 개의 글로빈 단백질과 철(Fe)을 포함하고 있는 네 개의 헴(heme) 색소로 이루어져있다. 헴 색소에는 포르피린이라는 평면의 네 자리 리간드가 포함되고, 포르피린의 질소 원자 네 개는 철(Fe) 이온과 배위 결합을 한다. 또한 헴은 아래 그림 5와 같이 Fe-N 배위 결합을 통하여 글로빈 단백질에 결합되어 헤모글로빈을 형성한다. 헤모글로빈의 철(Fe)이 산소(O_2)와 배위 결합하여 산소헤모글로빈을 만들고 생체 내에서 산소를 운반한다. 산소헤모글로빈에 존재하는 철(Fe)의 산화수를 결정하고 그 근거를 설명하시오.

A.



B.

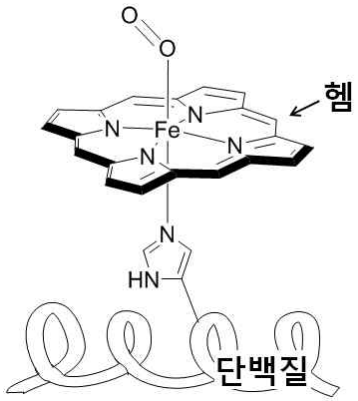


그림 5. 포르피린(A)과 산소헤모글로빈(B)

(c) $Pt(NH_3)_2(OH)_2$는 사각평면 형태의 착물이다. 이 화합물에 두 자리 리간드인 에틸렌다이아민을 같은 몰수로 첨가하면 치환반응은 일어나지만 킬레이트가 형성되지 않는다. 이 착물의 구조를 예측하고 설명하시오.

(d) 에틸렌다이아민($NH_2-CH_2-CH_2-NH_2$)과 마찬가지로 프로필렌다이아민($NH_2-CH_2-CH_2-CH_2-NH_2$)은 두 자리 리간드이다. 특별한 경우를 제외한다면, 프로필렌다이아민이 킬레이트를 이룰 경우 에틸렌다이아민이 형성하는 킬레이트보다 더 안정하다. 그 이유를 설명하시오.

(e) 화학반응에서 무질서도의 척도는 엔트로피로 나타낸다. 질서 있는 상태에서 무질서한 상태로 되는 것은 엔트로피가 작은 상태에서 큰 상태로 되는 것을 뜻하고, 반응의 엔트로피 변화는 무질서도의 변화를 통하여 쉽게 예측될 수 있다. 일반적으로 엔트로피가 증가하는 방향으로 반응이 유리하다. 예를 들어 다음의 화학 반응식을 보면 킬레이트를 포함하는 반응의 평형상수(K)가 그렇지 않은 경우보다 큼을 알 수 있다. 그 이유를 논술하시오.

$$[Cd(H_2O)_6]^{2+}(aq) + en(aq) \rightleftarrows [Cd(en)(H_2O)_4]^{2+}(aq) + 2H_2O(\ell) \qquad \log K = 5.84$$

(en = 에틸렌다이아민)

$$[Cd(H_2O)_6]^{2+}(aq) + 2NH_3(aq) \rightleftarrows [Cd(NH_3)_2(H_2O)_4]^{2+}(aq) + 2H_2O(\ell) \qquad \log K = 4.95$$