논 술 (자연 A)

※주의사항 : 논제 1은 필수로 풀고 논제 2, 3, 4 중 한 문제를 선택해서 답안을 작성하시오.

논제 1: 수학 (필수)

(가)

정의역이 $\{x|1 \le x \le 2\}$이고 공역이 $\{y|1 \le y \le 2\}$인 연속함수 $y=f(x)$가 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f_n(x)$를

$$f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f \ (f\text{가 } n\text{개})$$

라 하고 $a_n = \int_1^2 f_n(x)dx$로 나타냈더니 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{a_n}$를 만족하고 첫째항이 $\frac{5}{3}$인 수열이 되었다.

(나)

어떤 함수 $y=g(x)$의 그래프가 제시문 (가)에서 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점$(3,3)$에 대하여 점대칭이라 하면, 함수 $y=g(x)$는 정의역이 $\{x|4 \le x \le 5\}$이고 공역이 $\{y|4 \le y \le 5\}$인 연속함수가 된다. 이 때 자연수 n에 대하여 함수 $y=g_n(x)$를

$$g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g \ (g\text{가 } n\text{개})$$

로 나타낸다.

(다)

정의역이 $\{x|0 \le x \le 1\}$이고 공역이 $\{y|0 \le y \le 1\}$인 함수 $y=h(x)$가 $0 \le x < \frac{1}{3}$일 때 $h(x)=2x$를, $\frac{1}{3} \le x \le 1$일 때 $h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$을 만족한다. 이 때 자연수 n에 대하여 함수 $y=h_n(x)$를

$$h_n = h \circ h \circ \cdots \circ h \ (h\text{가 } n\text{개})$$

로 나타낸다.

(a) 정의역이 $\{x|1 \le x \le 2\}$이고 공역이 $\{y|1 \le y \le 2\}$인 연속함수 $y=p(x)$가 일대일 대응이라 하자. $\int_1^2 p(x)\,dx = \frac{4}{3}$일 때 역함수의 적분값 $\int_1^2 p^{-1}(x)\,dx$에 대하여 간단히 설명하시오.

(b) 제시문 (가)에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하시오.

(c) 제시문 (나)에서 주어진 함수 $y=g_n(x)$를 제시문 (가)의 함수 $y=f_n(x)$로 어떻게 나타낼 수 있는가를 수학적 귀납법을 이용하여 설명하고, 적분값 $\int_4^5 g_5(x)\,dx$를 구하시오.

(d) 제시문 (다)에서 주어진 함수 $y=h_n(x)$에 대하여 적분값 $\int_0^1 h_n(x)\,dx$를 구하시오.

논제 2: 물리 (선택)

(가)

19세기 말에 톰슨은 그림 1과 같이 진공 상자 내에서 전자의 전하량 e와 질량 m_e의 비율인 비전하를 측정하는 실험을 하였다. 톰슨은 이 실험에서 비전하 값으로 $e/m_e = 1.76\times10^{11}$ C/kg을 얻었다. 이후 20세기 초에 밀리컨은 전자의 전하량을 독립적으로 측정할 수 있는 기름방울 상자를 고안하여 전자의 기본 전하량이 $e = 1.6\times10^{-19}$ C임을 측정하였다. 톰슨이 측정한 전자의 비전하와 밀리컨이 측정한 전자의 기본 전하량으로부터 전자의 질량은 $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg임을 알 수 있다. 그림 1에서 속력 v로 가속된 전자는 전극판의 중심으로 입사하고, 전기장과 자기장은 전극판 사이에만 존재하며 중력은 고려하지 않는다.

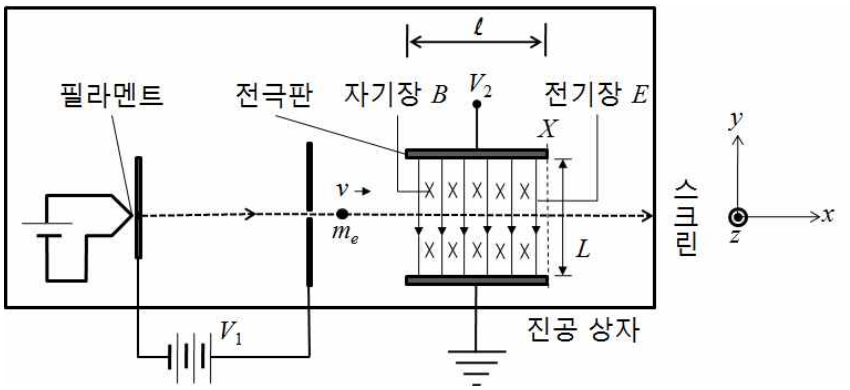


그림 1. 톰슨의 전자 비전하 측정 장치

(나)

20세기 초에 드브로이는 속력 v와 질량 m을 가진 모든 입자는 물질파 성질을 가지고 있으며 물질파의 파장은 $\lambda = h/p$라고 주장하였다. 여기서 h는 플랑크 상수 $h = 6.6\times10^{-34}$ J·s이고 p는 운동량이다. 이 후 물질파 가설은 그림 2와 같은 물질파 간섭 장치를 이용하여 검증되었다. 그림 2에서 간격이 d인 이중 슬릿을 통과한 전자들은 r_1 및 r_2 경로를 따라 D만큼 떨어진 형광 스크린 위의 임의의 점 P에서 만나고, 슬릿 중심과 P점 사이의 각은 θ이다.

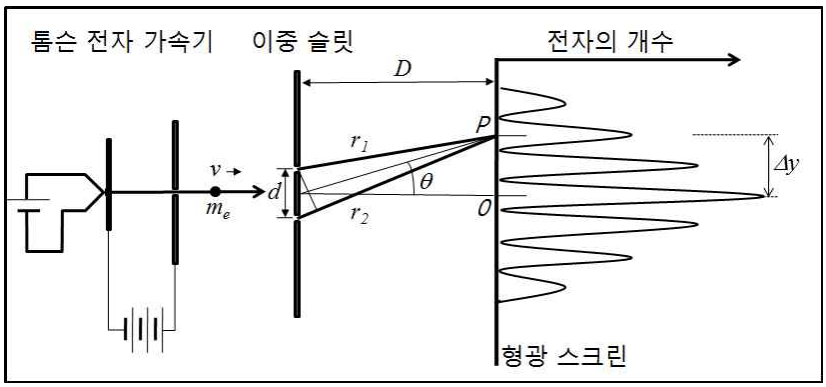


그림 2. 전자를 이용한 이중 슬릿 간섭 장치

(a) 제시문 (가)에서 가속전압이 $V_1 = 200$ V일 때 가속된 전자의 물질파 파장 λ를 구하시오.

(b) 제시문 (가)에서 자기장이 꺼져있는 상태에서 전극판(길이 ℓ, 전극 사이 거리 L)에 전위차 $V_2 > 0$를 걸어주면 전자의 진행방향이 바뀐다. 이 때 전극판의 출구면 X에서 전자의 진행이 어느 방향으로 휘는지 설명하시오. 그리고 전극판의 출구면 X에 도달한 전자의 위치가 중심에서 Y만큼 떨어져 있을 때 전자의 파장 λ와 Y와의 관계를 구하시오.

(c) 제시문 (가)에서 균일한 자기장 B를 $-z$ 방향으로 켜고, 전자가 휘어짐 없이 직진하도록 V_2를 조정하여 $V_2 = V_0$가 되었다. 이 후 $t = 0$인 순간부터 $V_2(t) = V_0 + \alpha t$로 전극판에 가해주었다. $t = 0$에 전극판에 진입한 전자가 출구면 X에 도달한 위치는 중심에서 $y_0 < L/2$ 이었다. 이 때 α와 전극판 내부에서의 전자의 위치 $y(t)$를 y_0와 v를 이용하여 각각 표현하시오.

(d) 제시문 (나)에서 P점이 물질파 간섭무늬의 두 번째 밝은 무늬 중심과 일치한다고 하자. P점과 중앙 간섭무늬 O점과의 거리를 Δy라고 할 때 전자의 속력 v와 Δy와의 관계를 구하시오. 단, D는 d와 Δy 보다 매우 크다.

논제 3: 화학 (선택)

(가)

엔트로피(S)는 계(system)의 무질서도와 밀접한 관계를 가지며 무질서도가 증가하는 계의 엔트로피의 변화(ΔS)는 양의 값을 갖는다. 오존(O_3)이 산소분자(O_2)와 산소라디칼(O)로 분해되는 반응은 엔트로피가 증가하는 전형적인 예이다. 또한 일반적으로 같은 몰수의 고체, 액체, 기체 순으로 물질의 엔트로피 값이 증가한다.

(나)

엔탈피(H)는 분자내에서 원자간에 작용하는 결합력과 밀접한 관계가 있다. 원자간 결합력이 약한 분자들이 원자간 결합력이 강한 분자들로 변하는 화학반응을 발열반응이라 부르며, 발열반응의 엔탈피 변화(ΔH)는 음의 값을 가진다.

(다)

화학 반응의 자발성은 반응의 자유에너지 변화(ΔG)의 부호로 판단할 수 있다. 자유에너지의 변화(ΔG)는 엔탈피의 변화(ΔH), 엔트로피의 변화(ΔS), 온도(T)에 의하여 결정되며 그 관계는 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$로 표현된다. 일반적으로 ΔH와 ΔS는 온도의 변화에 큰 영향을 받지 않으므로, 임의의 온도 T에서 ΔG 값을 구할 때 표준상태(25 °C, 1 기압)에서 측정한 ΔH^o와 ΔS^o로 대체해서 사용하면 된다. 자발적인 반응은 음의 ΔG값을 가지며, 계의 자유에너지가 최솟값을 가지게 되면($\Delta G = 0$) 그 계는 정반응의 속도와 역반응의 속도가 동일한 화학평형 상태에 도달하게 된다.

상온에서 철이 녹스는 과정($2Fe + 3/2O_2 \rightarrow Fe_2O_3$)은 자발적인 발열반응이다. 그러나 아주 고온에서는 이 반응의 역반응이 일어나게 되어 제철소의 용광로에서 산화철로부터 순수한 철을 얻을 수 있다. 이 반응의 자유에너지의 변화를 아래 그래프에 표시하였다.

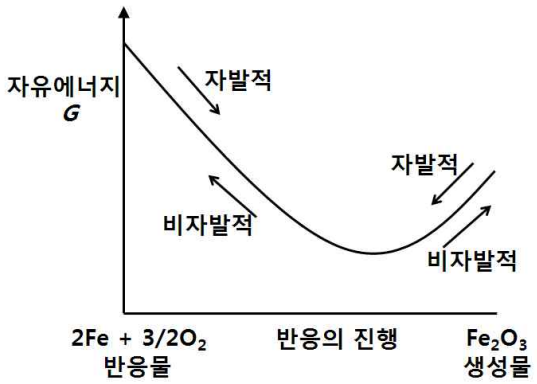


그림 1.

(라)

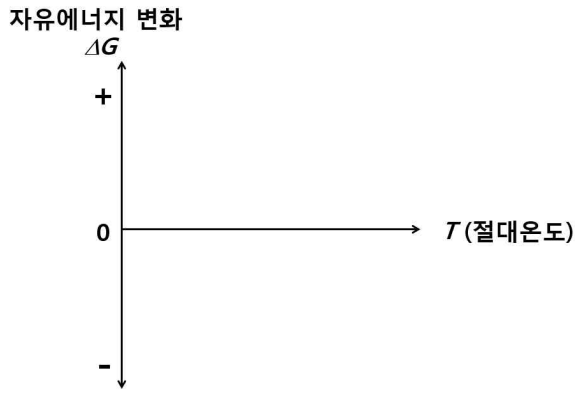
화학평형의 정반응과 역반응간의 상대적인 우세는 화학평형상수(K)에 의해 결정되며, K가 1보다 월등히 크면 정반응이 우세하고 그 반대의 경우 역반응이 우세하다. 표준상태(25 °C, 1 기압)의 화학평형상수는 $\Delta G^o = -RT\ln K$의 관계식에 의해 얻을 수 있다(ΔG^o은 표준상태에서 측정한 수치, R은 양의 값을 가지는 기체상수).

◎ 다음의 화학반응식에서 질소와 수소가 반응하여 암모니아를 형성하는 반응은 발열반응이고, 상온에서의 화학평형상수 K 값은 1보다 아주 큰 값을 갖는다.

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftarrows 2NH_3(g)$$

이 반응은 상온에서 큰 평형상수 K 값을 갖지만 활성화에너지(E_a)가 아주 커서 상온에서는 거의 진행되지 않는다.

(a) 제시문 (다)를 이용하여 이 반응의 ΔG와 온도(T)의 관계를 아래 그래프의 형태를 이용하여 그리시오. 그래프의 기울기 및 반응이 평형을 이루는 온도를 ΔH와 ΔS를 이용하여 각각 표기하시오.



(b) 제시문 (다)와 (라)를 이용하여 반응온도 $T_1 = 250$ K (K는 절대온도단위)의 화학평형상수 K_1과 반응온도 $T_2 = 500$ K에서의 화학평형상수 K_2를 ΔH^o과 ΔS^o을 이용하여 표시하고, K_1과 K_2의 상대적인 크기를 비교하고 그 이유를 설명하시오.

(c) 이 반응의 반응속도를 증가시키기 위하여 활성화에너지를 낮추는 촉매를 사용하고 상온보다 훨씬 높은 반응온도를 사용하여야 한다. 반응의 온도를 높였을 때 얻어지는 NH_3의 수득율에 대해 제시문 (다) 및 (라)에 근거하여 논술하시오.

◎ 인체로 투입된 약(drug)의 분자들은 우리 몸속의 생분자(DNA, RNA, 효소 등)들의 친수성 또는 소수성을 가지는 특정 위치에 결합한다. 이 과정을 단순화하여 나타내면 다음과 같다.

$$\text{약} + \text{생분자} \rightleftarrows \text{약} \cdot \text{생분자}$$

(d) 최근 RNA의 아주 짧은 가닥을 약으로 이용하려는 노력을 하고 있다. 이러한 RNA의 짧은 가닥이 약으로 작용할 수 있는 이유에 대해 유추하고 주어진 제시문 (가)~(라)에 근거하여 설명하시오.

(e) 인체의 적정온도는 36.5 °C 이다. 만약 가상의 생물체의 적정체온이 80 °C 정도의 높은 온도라면, 위와 같이 RNA를 이용하여 이 생물체의 병을 치료하는 것이 불가능하다. 그 이유를 주어진 제시문 (가)~(라)에 근거하여 설명하시오.

논제 4: 지구과학 (선택)

(가)

주계열성인 태양은 약 50억년전에 생성되었다. 그 이후 수소핵융합 반응에 의해 태양에너지 방출량은 점차 증가하여 지구로 유입되는 태양에너지의 양은 증가하였다. 지구 환경은 태양에너지의 변화에 큰 영향을 받는다. 약 20억년 이전에 태양에너지 방출량은 현재에 비해 약 85% 이하로 낮았으리라 추정되는데, 이러한 조건에서 지구의 표층 온도는 0 °C 이하였어야 한다. 그럼에도 불구하고, 20억년 이전 선캄브리아대 암석에 남아 있는 여러 지질기록은 당시에도 지표면의 물이 얼지 않고 액체 상태로 존재하였음을 지시해준다. 이러한 불일치 현상을 소위 '젊고 희미한 태양의 역설(Young Faint Sun Paradox)'이라 부른다.

(나)

지구과학자들은 이 역설을 설명하기 위하여 선캄브리아대의 여러 지질기록을 찾아 연구하고 있다. 즉, 지구로 유입되는 태양에너지가 훨씬 적었음에도 불구하고 지표는 영상의 온도를 유지하였음을 지시하는 증거들이 연구를 통해 발견되고 있다. 최근 지구과학자들은 약 27억년전 암석에 기록된 빗방울 흔적 화석을 이용하여 당시의 대기 조성과 밀도를 추정하였다. 그 방법 및 결과를 요약하면 다음과 같다.

지표면에 떨어지는 빗방울은 부드러운 암석이나 퇴적물 중에 그림 1과 같은 원형의 흔적 화석을 남기게 된다. 빗방울이 떨어져 조각나지 않고 지표면에 원형을 흔적으로 남기기 위해서는 특정한 역학 조건이 필요하다. 원형 흔적의 직경은 빗방울의 운동량과 지표물질의 물리적 특성 등 복잡한 요인에 따라 달라지는데, 빗방울의 운동량은 빗방울이 낙하하는 대기의 특성과 관련된다. 빗방울 낙하운동에 관한 모의실험 결과, 빗방울 흔적의 최대 직경은 최종 낙하속도(종속)와 관련되고, 종속의 최댓값은 표층 대기의 밀도와 가장 밀접하게 관련되는 것으로 밝혀졌다. 그림 2는 남아프리카의 선캄브리아대 암석에서 발견된 빗방울 흔적의 최대 직경을 이용하여 추정한 당시 표층 대기의 밀도를 보여준다.

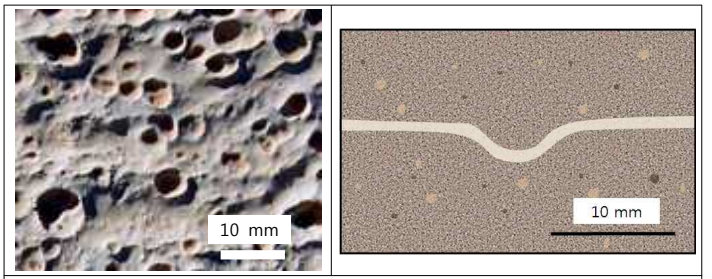


그림 1. 선캄브리아대 암석에 남은 빗방울 흔적 화석. 오른쪽은 암석 시료의 단면 스케치로서, 중간에는 약 2 mm 깊이로 파인 빗방울 흔적의 단면이 잘 나타나 있다.

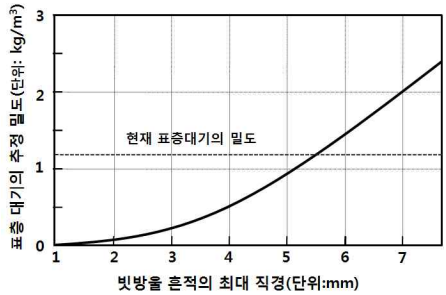


그림 2. 선캄브리아대 암석에서 추정한 빗방울 흔적의 최대 직경과 대기 밀도와의 관계

(a) 제시문 (가)의 '젊고 희미한 태양의 역설'과 관련하여, 27억년전에도 지구상에 액체 상태의 물이 존재했음을 나타내는 직접적인 지질 기록에 어떠한 것들이 있는지 두 가지(빗방울 흔적 제외)를 제시하시오. 또한, 지구의 열수지 균형을 고려하여, 당시 지구 표면의 온도가 물의 어는점 이상을 유지할 수 있었던 이유 두 가지를 추론하시오.

(b) 제시문 (나)와 관련하여, 고환경 해석에 가장 좋은 빗방울 흔적이 만들어지고 보존될 수 있는 암석은 어떠한 것인지 제시하시오. 또한, 빗방울 흔적 화석을 남긴 당시의 강우 특성(강우량, 강우 지속시간)과 기후를 추론하시오.

(c) 제시문 (나)와 아래에 주어진 자료를 이용하여, 빗방울 흔적 화석을 이용한 선캄브리아대 대기환경 추정에 관한 다음 물음에 답하시오.

① 오늘날의 공기는 대략 질소 80%와 산소 20%로 구성되며, 이산화탄소의 농도는 0.04%이다.
② 오늘날 표층 대기(1기압)의 평균 밀도는 1.2 kg/m^3이다.
③ 공기는 농도가 희박하여 '이상기체'로 취급할 수 있다. 온도가 같다면, 표층 대기의 밀도는 대기 조성 물질의 평균 분자량에 비례한다. 주요 원소의 원자량(g/mole)은 H=1, C=12, N=14, O=16이다.
④ 남아프리카 선캄브리아대(27억년전) 암석에 나타난 빗방울 흔적 화석의 최대 직경은 4~5.3 mm였다.

1) 27억년전 대기 밀도 범위를 제시하고, 이를 근거로 그 시대의 대기 조성을 현재의 대기와 비교하여 추론하시오.
2) 위 1)에서 제시한 최대 밀도 조건에서, '무산소 상태'였던 당시의 대기 중 이산화탄소의 이론적인 최대 농도는 현재에 비해 대략 몇 배가 되는지 추정하시오(단, 당시 대기 중 탄소 함유 기체는 이산화탄소만 있었고, 표층 대기 온도는 현재와 같았다고 가정한다).
3) 위 2)에서 추정한 이산화탄소의 농도는 27억년 이전의 '젊고 희미한 태양의 역설'을 설명하기에는 여전히 낮은 것으로 판단된다. 그렇다면, 이 역설을 과학적으로 설명해 줄 수 있는 또 다른 기체를 제시하고 그 이유를 설명하시오.

(d) 지질기록은 '약 23억 5천만년전에 지구 대기가 갑자기 산화상태로 바뀌었음'을 보여준다. 이를 '대규모 산화사건(Great Oxidation Event)'이라 부른다. 이 무렵 해양환경에서는 철광층이 대규모로 형성되었으며, 철광층 중에는 산화철 광물의 함량이 높다. 대규모 산화사건의 원인, 그리고 그 원인에 의한 철광층의 생성과정을 추론하시오.