논 술 (자연 A)

※주의사항 : 논제 1은 필수로 풀고 논제 2, 3, 4 중 한 문제를 선택해서 답안을 작성하시오.

논제 1: 수학 (필수)

(가)

정의역이 $\{x|1 \le x \le 2\}$이고 공역이 $\{y|1 \le y \le 2\}$인 연속함수 $y=f(x)$가 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f_n(x)$를

$$f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f \ (f\text{가 } n\text{개})$$

라 하고 $a_n = \int_1^2 f_n(x)dx$로 나타냈더니 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{a_n}$를 만족하고 첫째항이 $\frac{5}{3}$인 수열이 되었다.

(나)

어떤 함수 $y=g(x)$의 그래프가 제시문 (가)에서 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점$(3,3)$에 대하여 점대칭이라 하면, 함수 $y=g(x)$는 정의역이 $\{x|4 \le x \le 5\}$이고 공역이 $\{y|4 \le y \le 5\}$인 연속함수가 된다. 이 때 자연수 n에 대하여 함수 $y=g_n(x)$를

$$g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g \ (g\text{가 } n\text{개})$$

로 나타낸다.

(다)

정의역이 $\{x|0 \le x \le 1\}$이고 공역이 $\{y|0 \le y \le 1\}$인 함수 $y=h(x)$가 $0 \le x < \frac{1}{3}$일 때 $h(x)=2x$를, $\frac{1}{3} \le x \le 1$일 때 $h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$을 만족한다. 이 때 자연수 n에 대하여 함수 $y=h_n(x)$를

$$h_n = h \circ h \circ \cdots \circ h \ (h\text{가 } n\text{개})$$

로 나타낸다.

(a) 정의역이 $\{x|1 \le x \le 2\}$이고 공역이 $\{y|1 \le y \le 2\}$인 연속함수 $y=p(x)$가 일대일 대응이라 하자. $\int_1^2 p(x)\,dx = \frac{4}{3}$일 때 역함수의 적분값 $\int_1^2 p^{-1}(x)\,dx$에 대하여 간단히 설명하시오.

(b) 제시문 (가)에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하시오.

(c) 제시문 (나)에서 주어진 함수 $y=g_n(x)$를 제시문 (가)의 함수 $y=f_n(x)$로 어떻게 나타낼 수 있는가를 수학적 귀납법을 이용하여 설명하고, 적분값 $\int_4^5 g_5(x)\,dx$를 구하시오.

(d) 제시문 (다)에서 주어진 함수 $y=h_n(x)$에 대하여 적분값 $\int_0^1 h_n(x)\,dx$를 구하시오.

논제 2: 물리 (선택)

(가)

19세기 말에 톰슨은 그림 1과 같이 진공 상자 내에서 전자의 전하량 e와 질량 m_e의 비율인 비전하를 측정하는 실험을 하였다. 톰슨은 이 실험에서 비전하 값으로 $e/m_e = 1.76\times10^{11}$ C/kg을 얻었다. 이후 20세기 초에 밀리컨은 전자의 전하량을 독립적으로 측정할 수 있는 기름방울 상자를 고안하여 전자의 기본 전하량이 $e = 1.6\times10^{-19}$ C임을 측정하였다. 톰슨이 측정한 전자의 비전하와 밀리컨이 측정한 전자의 기본 전하량으로부터 전자의 질량은 $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg임을 알 수 있다. 그림 1에서 속력 v로 가속된 전자는 전극판의 중심으로 입사하고, 전기장과 자기장은 전극판 사이에만 존재하며 중력은 고려하지 않는다.

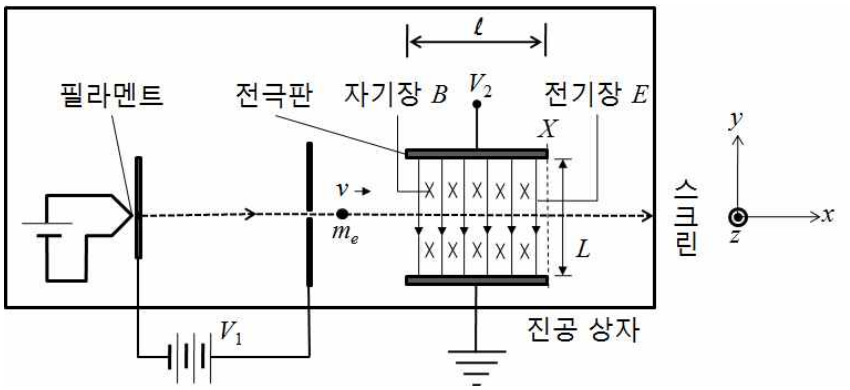


그림 1. 톰슨의 전자 비전하 측정 장치

(나)

20세기 초에 드브로이는 속력 v와 질량 m을 가진 모든 입자는 물질파 성질을 가지고 있으며 물질파의 파장은 $\lambda = h/p$라고 주장하였다. 여기서 h는 플랑크 상수 $h = 6.6\times10^{-34}$ J·s이고 p는 운동량이다. 이 후 물질파 가설은 그림 2와 같은 물질파 간섭 장치를 이용하여 검증되었다. 그림 2에서 간격이 d인 이중 슬릿을 통과한 전자들은 r_1 및 r_2 경로를 따라 D만큼 떨어진 형광 스크린 위의 임의의 점 P에서 만나고, 슬릿 중심과 P점 사이의 각은 θ이다.

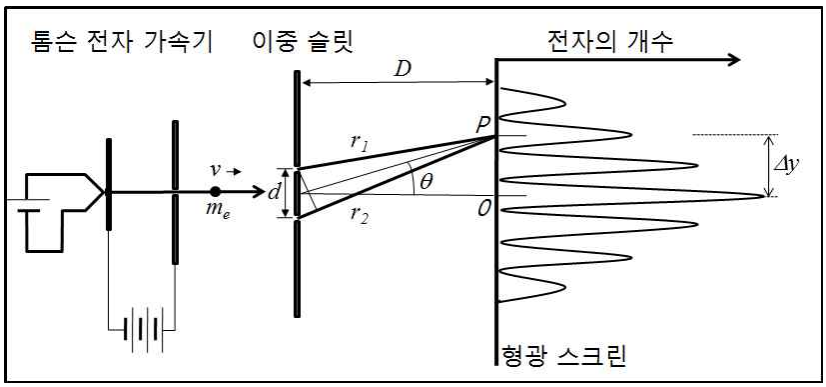


그림 2. 전자를 이용한 이중 슬릿 간섭 장치

(a) 제시문 (가)에서 가속전압이 $V_1 = 200$ V일 때 가속된 전자의 물질파 파장 λ를 구하시오.

(b) 제시문 (가)에서 자기장이 꺼져있는 상태에서 전극판(길이 ℓ, 전극 사이 거리 L)에 전위차 $V_2 > 0$를 걸어주면 전자의 진행방향이 바뀐다. 이 때 전극판의 출구면 X에서 전자의 진행이 어느 방향으로 휘는지 설명하시오. 그리고 전극판의 출구면 X에 도달한 전자의 위치가 중심에서 Y만큼 떨어져 있을 때 전자의 파장 λ와 Y와의 관계를 구하시오.

(c) 제시문 (가)에서 균일한 자기장 B를 $-z$ 방향으로 켜고, 전자가 휘어짐 없이 직진하도록 V_2를 조정하여 $V_2 = V_0$가 되었다. 이 후 $t = 0$인 순간부터 $V_2(t) = V_0 + \alpha t$로 전극판에 가해주었다. $t = 0$에 전극판에 진입한 전자가 출구면 X에 도달한 위치는 중심에서 $y_0 < L/2$ 이었다. 이 때 α와 전극판 내부에서의 전자의 위치 $y(t)$를 y_0와 v를 이용하여 각각 표현하시오.

(d) 제시문 (나)에서 P점이 물질파 간섭무늬의 두 번째 밝은 무늬 중심과 일치한다고 하자. P점과 중앙 간섭무늬 O점과의 거리를 Δy라고 할 때 전자의 속력 v와 Δy와의 관계를 구하시오. 단, D는 d와 Δy 보다 매우 크다.

논제 3: 화학 (선택)

(가)

엔트로피(S)는 계(system)의 무질서도와 밀접한 관계를 가지며 무질서도가 증가하는 계의 엔트로피의 변화(ΔS)는 양의 값을 갖는다. 오존(O_3)이 산소분자(O_2)와 산소라디칼(O)로 분해되는 반응은 엔트로피가 증가하는 전형적인 예이다. 또한 일반적으로 같은 몰수의 고체, 액체, 기체 순으로 물질의 엔트로피 값이 증가한다.

(나)

엔탈피(H)는 분자내에서 원자간에 작용하는 결합력과 밀접한 관계가 있다. 원자간 결합력이 약한 분자들이 원자간 결합력이 강한 분자들로 변하는 화학반응을 발열반응이라 부르며, 발열반응의 엔탈피 변화(ΔH)는 음의 값을 가진다.

(다)

화학 반응의 자발성은 반응의 자유에너지 변화(ΔG)의 부호로 판단할 수 있다. 자유에너지의 변화(ΔG)는 엔탈피의 변화(ΔH), 엔트로피의 변화(ΔS), 온도(T)에 의하여 결정되며 그 관계는 $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$로 표현된다. 일반적으로 ΔH와 ΔS는 온도의 변화에 큰 영향을 받지 않으므로, 임의의 온도 T에서 ΔG 값을 구할 때 표준상태(25 °C, 1 기압)에서 측정한 ΔH^o와 ΔS^o로 대체해서 사용하면 된다. 자발적인 반응은 음의 ΔG값을 가지며, 계의 자유에너지가 최솟값을 가지게 되면($\Delta G = 0$) 그 계는 정반응의 속도와 역반응의 속도가 동일한 화학평형 상태에 도달하게 된다.

상온에서 철이 녹스는 과정($2Fe + 3/2O_2 \rightarrow Fe_2O_3$)은 자발적인 발열반응이다. 그러나 아주 고온에서는 이 반응의 역반응이 일어나게 되어 제철소의 용광로에서 산화철로부터 순수한 철을 얻을 수 있다. 이 반응의 자유에너지의 변화를 아래 그래프에 표시하였다.

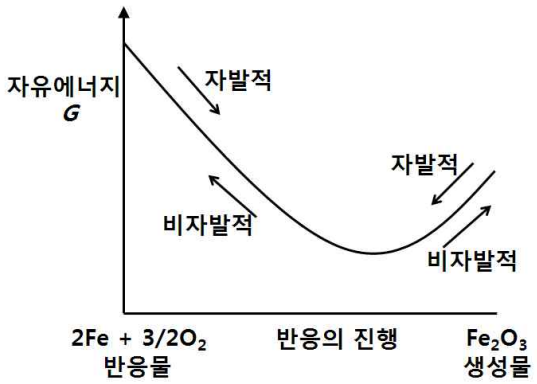


그림 1.

(라)

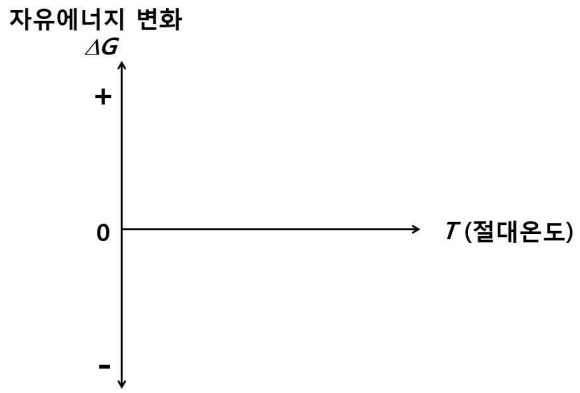
화학평형의 정반응과 역반응간의 상대적인 우세는 화학평형상수(K)에 의해 결정되며, K가 1보다 월등히 크면 정반응이 우세하고 그 반대의 경우 역반응이 우세하다. 표준상태(25 °C, 1 기압)의 화학평형상수는 $\Delta G^o = -RT\ln K$의 관계식에 의해 얻을 수 있다(ΔG^o은 표준상태에서 측정한 수치, R은 양의 값을 가지는 기체상수).

◎ 다음의 화학반응식에서 질소와 수소가 반응하여 암모니아를 형성하는 반응은 발열반응이고, 상온에서의 화학평형상수 K 값은 1보다 아주 큰 값을 갖는다.

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftarrows 2NH_3(g)$$

이 반응은 상온에서 큰 평형상수 K 값을 갖지만 활성화에너지(E_a)가 아주 커서 상온에서는 거의 진행되지 않는다.

(a) 제시문 (다)를 이용하여 이 반응의 ΔG와 온도(T)의 관계를 아래 그래프의 형태를 이용하여 그리시오. 그래프의 기울기 및 반응이 평형을 이루는 온도를 ΔH와 ΔS를 이용하여 각각 표기하시오.



(b) 제시문 (다)와 (라)를 이용하여 반응온도 $T_1 = 250$ K (K는 절대온도단위)의 화학평형상수 K_1과 반응온도 $T_2 = 500$ K에서의 화학평형상수 K_2를 ΔH^o과 ΔS^o을 이용하여 표시하고, K_1과 K_2의 상대적인 크기를 비교하고 그 이유를 설명하시오.

(c) 이 반응의 반응속도를 증가시키기 위하여 활성화에너지를 낮추는 촉매를 사용하고 상온보다 훨씬 높은 반응온도를 사용하여야 한다. 반응의 온도를 높였을 때 얻어지는 NH_3의 수득율에 대해 제시문 (다) 및 (라)에 근거하여 논술하시오.

◎ 인체로 투입된 약(drug)의 분자들은 우리 몸속의 생분자(DNA, RNA, 효소 등)들의 친수성 또는 소수성을 가지는 특정 위치에 결합한다. 이 과정을 단순화하여 나타내면 다음과 같다.

$$\text{약} + \text{생분자} \rightleftarrows \text{약} \cdot \text{생분자}$$

(d) 최근 RNA의 아주 짧은 가닥을 약으로 이용하려는 노력을 하고 있다. 이러한 RNA의 짧은 가닥이 약으로 작용할 수 있는 이유에 대해 유추하고 주어진 제시문 (가)~(라)에 근거하여 설명하시오.

(e) 인체의 적정온도는 36.5 °C 이다. 만약 가상의 생물체의 적정체온이 80 °C 정도의 높은 온도라면, 위와 같이 RNA를 이용하여 이 생물체의 병을 치료하는 것이 불가능하다. 그 이유를 주어진 제시문 (가)~(라)에 근거하여 설명하시오.

논제 4: 생물 (선택)

(가)

구획화는 생명체 기능의 핵심 중 하나이다. 세포 소기관들은 생체막을 이용하여 구획화를 할 수 있고, 구획에 따라서 서로 다른 환경이 만들어진다. 세포 소기관뿐만 아니라 거대한 단백질 복합체들도 구획화를 통하여 특정 기능을 획득하기도 한다. 최근 전자 현미경 기술의 발전으로 세포 소기관과 거대 단백질 복합체를 직접 관찰할 수 있게 되었다. 현미경으로 세포 내 구획화를 직접 확인하는 것 외에도 세포 분획법, 조직 배양법, 자기 방사법 등이 세포를 연구하는 방법으로 이용되고 있다.

(나)

리소좀은 단일 단위막으로 된 구형의 구조물로 여러 종류의 가수 분해 효소(리소조말 가수 분해 효소)를 포함하고 있다. 그 효소들은 리소좀 막으로 보호되어 있기 때문에 보통 때에는 세포 내 물질을 분해하지 않는다. 그러나 식세포 작용으로 식포가 형성되어 물질이 세포 안으로 들어오면 리소좀이 식포와 융합하고 리소조말 가수 분해 효소가 이 물질을 분해한다. 박테리아와 같은 외부 물질이 침입하면 세포가 식포를 형성하고 리소좀은 식포와 융합하여 이를 분해한다(그림 1). 또한, 리소좀은 자신의 세포가 손상되거나 죽었을 때도 이들을 분해시켜 새로운 세포가 신속히 생성되는 것을 돕는다.

(다)

우리는 누군가에게 물품을 전달하기 위해서 택배 시스템을 이용한다. 택배회사는 물품을 접수하면 고유한 표지(tag)를 붙이고, 그 물품을 표지 정보에 따라서 분류한 후에 정해진 위치로 물품을 보낸다. 수취인은 받은 물건을 확인하고 용도에 따라 처리하게 된다. 이러한 특정한 표지에 따른 인식, 분류 및 이동은 세포 내 단백질들에도 비슷하게 적용되고, 단백질들의 세포 내 운명을 결정할 때가 많다. 그 대표적인 예가 유비퀴틴(Ub) 표지이다(그림 1).

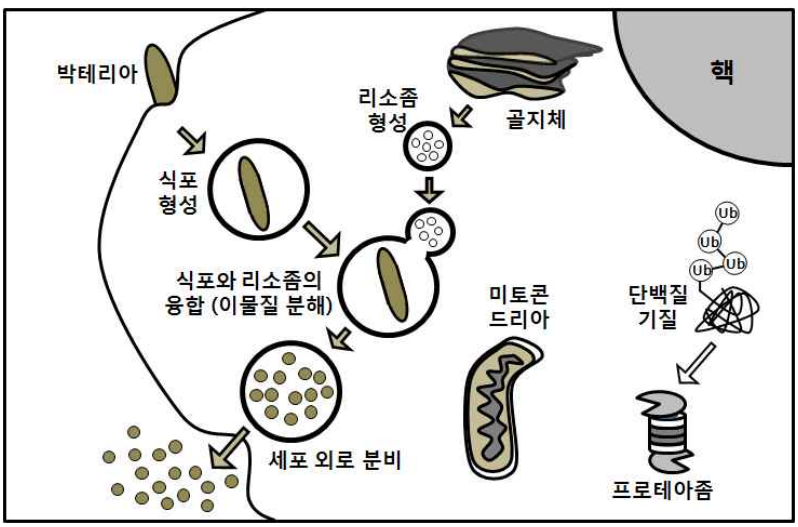


그림 1. 세포 내 구획화 및 리소좀의 작용

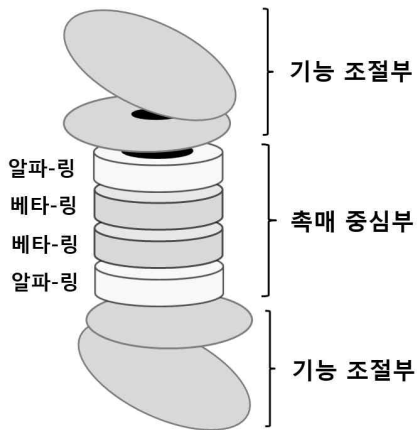


그림 2. 단백질 가수 분해 효소 프로테아좀의 구조

(라)

양성자 펌프는 세포막, 미토콘드리아와 리소좀 막 등에 존재하는 막 단백질로서 생체막에 의해 분리된 두 구획 사이의 수소 이온(H^+) 농도 차이를 만든다. 미토콘드리아의 내막에는 NADH 탈수소 효소, 시토크롬 환원 효소, 시토크롬 산화 효소 등 고정된 전자 운반체들과 이동성 전자 운반체들이 모여서 전자 전달계를 형성하고 있다. 이 과정에서 수소 이온이 미토콘드리아 기질(matrix)에서 내막과 외막 사이의 공간으로 보내지게 된다. 리소좀의 경우는 양성자 펌프와 염소 이온 통로들에 의해서 세포질의 수소 이온이 리소좀의 내강으로 보내지게 된다. 수소-칼륨 ATP 분해효소(H^+-K^+ ATPase)와 같은 양성자 펌프는 인체의 위(stomach)를 산성화하는데 주된 역할을 하고, 이러한 산성 환경에서 소화 효소인 펩신은 활성을 가진다. 양성자 펌프의 작용은 우리가 자전거를 타고 언덕을 오르거나 내려가는 것과 유사하다. 양성자 펌프에 의해 형성된 수소 이온 농도의 차이는 전기화학적 에너지로 저장되기도 하고 사용되기도 한다.

(마)

유비퀴틴은 막 단백질이나 침입한 세균에 붙어서 이 물질들을 리소좀으로 전달하거나, 세포질 내의 분해되어야 할 단백질에 붙어서 프로테아좀(가수 분해 효소 거대 복합체)으로 전달하는 표지 역할을 한다(그림 1). 프로테아좀은 가운데 촉매 중심부와 두 개의 기능 조절부로 구성되어 있다(그림 2). 촉매 중심부는 도넛 모양의 알파-링과 베타-링이 그림 2처럼 4개가 쌓인 형태로 단백질 기질(substrate)을 가수 분해하고, 기능 조절부는 유비퀴틴 표지가 붙은 기질을 인식하여 촉매 중심부로 전달하는 역할을 한다. 프로테아좀은 여러 가지 가수 분해 효소의 성질을 복합적으로 가지고 있는데, 트립신과 비슷한 활성도 가지고 있다. 이 효소 활성 부위는 원통형의 프로테아좀 촉매 중심부의 베타-링 안쪽에 존재하기 때문에 외부로 노출되어 있지 않다.

(a) 제시문에 주어진 리소조말 가수 분해 효소, 펩신, 프로테아좀이 존재하는 위치 및 작용점을 고려하여 pH에 따른 효소들의 활성을 그림으로 그리고 설명하시오. 단, x축은 pH, y축은 상대적 반응 속도로 지정하시오.

(b) 세포를 현미경으로 관찰하면 세포 내 구조물에 대해서는 알 수 있지만, 그 기능까지 알기는 어렵다. 제시문 (가)에 언급된 세 가지 다른 연구 방법들을 이용하여 알아낼 수 있는 정보들에 대해서 논술하시오.

(c) 미토콘드리아는 생명활동에 필요한 에너지를 생성하는 발전소이다. 제시문 (라)의 미토콘드리아 전자 전달계에 의해 형성된 수소 이온 농도의 차이는 화학 삼투 현상을 통하여 ATP를 생성하는 데 이용된다. ATP를 직접 생성하는 양성자 펌프와 위(stomach)를 산성화시키는 양성자 펌프를 비교 설명하시오.

(d) 제시문 (나)와 (다)의 정보를 이용하여 프로테아좀에 의한 단백질 분해와 리소좀에 의한 물질 분해의 유사점 및 차이점에 대해서 논술하시오.