논 술 (자연계 B)

※ 주의사항: 논제 1, 2는 필수로 풀고, 논제 3, 4, 5, 6 중 두 논제를 선택해서 답안을 작성하시오.
단, 답안에 자신을 드러내는 표현을 쓰지 말고 답안지의 테두리선을 벗어나지 말 것.

(가)

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 다음의 식을 만족한다.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n a_1 + b_n b_1 \\ b_{n+1} = b_n a_1 + a_n b_1 \end{cases}$$

논제 1. (필수) 위의 제시문 **(가)**를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(a) $a_n^2 - b_n^2$을 a_1과 b_1을 이용하여 나타내시오.

(b) 2×2 행렬 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$에 대하여 세 행렬 A_1, A_n, A_{n+1} 사이의 관계식을 구하고 이를 이용하여 세 행렬 A_m, A_n, A_{m+n} 사이의 관계식을 구하시오. (단, m, n은 자연수이다.)

(나)

직원뿔의 꼭짓점 O에서 밑면의 둘레 위의 한 점 A를 잇는 모선의 중점을 B라 하자. **그림 1**과 같이 B를 지나고 밑면과 평행한 평면으로 원뿔을 잘라 윗면의 반지름이 1, 밑면의 반지름이 2, 선분 AB의 길이가 x인 직원뿔대를 얻었다. 한 점 P가 점 A에서 출발하여 직원뿔대의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 B에 도달할 때, 그 경로가 최단거리를 가지게 되는 경우를 생각해 보자. (단, 경로는 윗면의 경계 또는 밑면의 경계의 일부를 포함할 수 있다.)

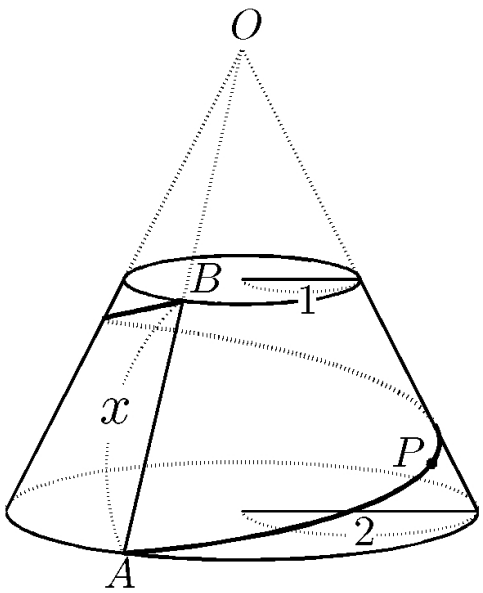


그림 1

논제 2. (필수) 위의 제시문 **(나)**를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(a) $x=2$일 때 경로의 최단거리를 구하시오.

(b) 경로의 최단거리를 x의 함수 $f(x)$로 나타내시오.

(c) 논제 **2(b)**에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 $x=6$에서의 연속성을 논하시오.

(다)

전하 입자를 가속시키는 장치인 사이클로트론의 원리를 이해하기 위하여 다음을 생각한다. **그림 2**에서와 같이 위쪽에는 반경이 R인 반원 모양의 상자 1이, 그리고 아래쪽에는 반경이 $R-\delta$인 반원 모양의 상자 2가 거리 d만큼 떨어져서 서로 마주보고 있다. 질량이 m이고 전기 전하량이 $+q$인 입자가 상자 1의 직선 부분 중심에 정지하고 있다. 이때, 전위차 V를 두 상자 사이에 걸어 주어 입자를 상자 2 쪽으로 직선 가속 운동을 시킨다. 상자들이 있는 공간에는 지면에서 수직으로 나오는 방향으로 균일한 자기장 B가 존재한다. 따라서 상자 2로 들어온 입자는 원운동을 하여 상자 2를 탈출하게 되는데 이때 전위차 $-V$를 걸어 주어 다시 상자 1 쪽으로 직선 가속을 받게 한다. 이러한 과정을 반복하여 입자를 가속하는 방법을 생각해 보자. 단, 상자 외부 자기장은 없고 전하 입자의 크기, 가속도 운동으로 인한 전자기파의 방출, 상대론적 효과 및 중력은 무시할 수 있다고 가정하자. 이 장치는 진공에서 작동한다.

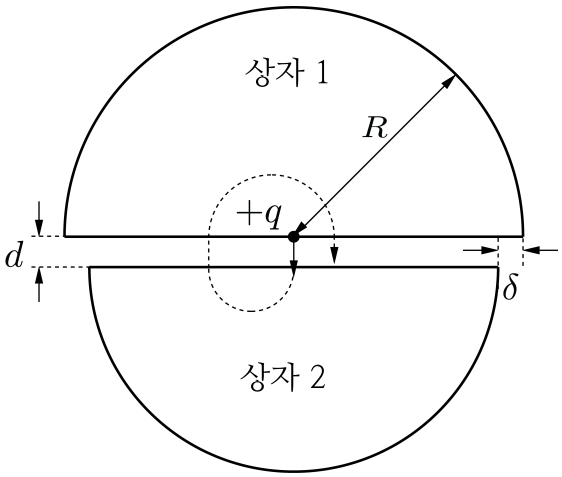


그림 2. 이상적인 사이클로트론의 단면도

(라)

그림 3과 같이 서로 질량이 다른 두 물체가 마찰이 없는 평면 위에 위치하고 있다. 왼쪽 물체를 1, 오른쪽 물체를 2라고 하자. 평면의 양쪽 끝은 질량이 무한대인 벽으로 막혀 있고 두 벽은 길이 L만큼 떨어져 있다. 왼쪽 벽과 물체 1의 거리, 두 물체 간의 거리, 물체 2와 오른쪽 벽과의 거리는 모두 $\frac{L}{3}$로 동일하다. 물체 1은 질량이 m_1이고 초기 속력 v로 오른쪽에 정지하여 있는 물체 2와 충돌한다. 물체 2의 질량은 m_2라고 하자. 물체 간 충돌과 물체와 벽과의 충돌은 완전 탄성 충돌이고 물체의 크기와 회전운동은 없고 물체는 1차원 운동만 하는 것으로 가정한다.

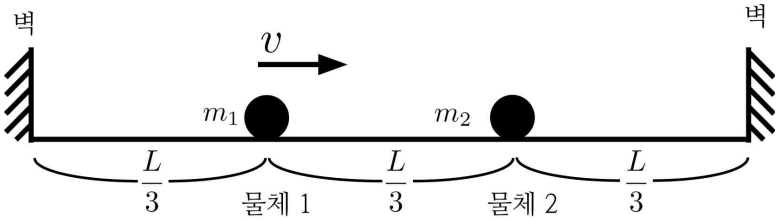


그림 3. 두 벽 사이에서 두 개의 물체가 완전 탄성 충돌을 하는 경우

논제 3. (선택) 제시문 **(다)**를 읽고 문제 **(a)**, **(b)**, 제시문 **(라)**를 읽고 **(c)**, **(d)**에 답하시오.

(a) n번 회전 후 상자 1의 직선 부분에 있는 전하 입자의 위치는 처음 정지해 있던 중심 지점으로부터 얼마나 떨어져 있는지 B, m, q, V의 함수로 표현하시오.

(b) 논제 **3(a)**에서 입자를 가속시키기 위하여 걸어주는 전위차의 부호를 매번 반복적으로 바꾸었다. 이때 반복적으로 바뀌는 시간 간격은 입자가 운동함에 따라 어떻게 변화하는지 그 값을 B, m, q, V의 함수로 표현하시오.

(c) 첫 번째 충돌 후 두 물체는 서로 반대 방향으로 운동하여 벽과 충돌하고 그 후 처음에 두 물체가 충돌한 지점, 즉 원래 물체 2가 정지하여 있던 지점에서 두 번째로 충돌하였다. 이 경우 m_1과 m_2의 관계식을 구하시오.

(d) 논제 **3(c)**에서의 조건이 만족될 경우 두 물체의 n번째 충돌은 어느 지점에서 일어나는가?

(마)

분자 내에서 결합에 참여하는 전자쌍을 공유전자쌍이라 하고 결합에 참여하지 않는 전자쌍을 비공유 전자쌍이라 한다. 전자쌍끼리는 서로 정전기적으로 반발하기 때문에 공간적으로 가능한 한 서로 멀리 떨어지는 경향이 있다. 이를 전자쌍 반발 원리라고 하는데 전자쌍 반발 원리를 적용하면 분자구조를 예측할 수 있다. 또한, 분자의 극성은 분자를 구성하는 원자들의 전기음성도 차이와 전체적인 분자구조에 의해 결정된다. 예를 들면, CF_4 분자의 경우에 불소원자(F)가 탄소원자(C)보다 더 큰 전기음성도를 갖고 있기 때문에 탄소원자와 불소원자 사이에는 전자가 불소원자 쪽으로 치우치는 극성결합을 형성한다. 또한, 중심원자인 탄소는 네 개의 공유전자쌍을 가지고 있는데, 네 개의 공유전자쌍이 3차원 공간상에서 정전기적 반발력을 최소화할 수 있는 구조는 정사면체 구조이므로 CF_4 분자는 정사면체 구조를 갖는다. CF_4 분자는 극성결합을 가지고 있지만 결합의 극성이 서로 상쇄되는 구조를 하고 있기 때문에 무극성분자이다.

(바)

두 화합물을 섞을 때, 서로 섞이는 정도는 화합물의 극성과 관련이 있다. 예를 들면, 물과 벤젠은 잘 섞이지 않고 두 층으로 분리되지만 물과 메탄올은 잘 섞인다. 물과 메탄올은 극성분자이고, 벤젠은 무극성분자이다. 즉, 극성분자는 극성분자와 잘 섞이고, 무극성분자는 무극성분자와 잘 섞인다. 그러나 극성분자는 무극성분자와 잘 섞이지 않는다.

(사)

기체가 물에 용해되는 정도는 헨리상수(K_H)로 나타낸다. 이산화탄소의 헨리상수는 25 °C에서 0.034 mol/L·atm이다. 이는 25 °C에서 이산화탄소 기체의 부분압력이 1 atm일 때, 물에 용해되어 있는 이산화탄소의 농도가 0.034 mol/L임을 의미한다. 또한, 암모니아의 헨리상수는 25 °C에서 62.5 mol/L·atm이다.

이산화탄소가 물에 용해되면 아래와 같은 반응이 일어난다.

$$CO_2(g) \rightleftharpoons CO_2(aq) \qquad K_{H,C} = 3.4 \times 10^{-2}$$
$$CO_2(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCO_3^-(aq) \qquad K_{a1} = 4.3 \times 10^{-7}$$
$$HCO_3^-(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CO_3^{2-}(aq) \qquad K_{a2} = 4.8 \times 10^{-11}$$

$K_{H,C}$는 이산화탄소의 헨리상수이고, K_{a1}과 K_{a2}는 탄산(H_2CO_3)의 1차와 2차 이온화상수이다.

반면, 암모니아가 물에 용해되면 아래와 같은 반응이 일어난다.

$$NH_3(g) \rightleftharpoons NH_3(aq) \qquad K_{H,A} = 62.5$$
$$NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq) \qquad K_b = 1.8 \times 10^{-5}$$

$K_{H,A}$는 암모니아의 헨리상수이고, K_b는 암모니아의 이온화상수이다.

(아)

그림 4-1과 같은 실험 장치를 생각해 보자. 두 용기는 막혀 있는 중간 밸브에 의해 분리되어 있고, 피스톤 형태의 마개로 닫혀 있다(피스톤의 질량은 무시한다.). 두 용기에 각각 0.50 L의 증류수가 담겨져 있고, 왼쪽 용기에는 이산화탄소 기체 2.24 L가 채워져 있고, 오른쪽 용기에는 암모니아 기체 2.24 L가 채워져 있다. 초기에 각 용기 내 기체의 압력은 1 atm, 외부 압력은 1 atm, 온도는 25 °C이다. 이때, 이산화탄소와 암모니아를 이상기체라고 가정한다. 이상기체 1 mol은 온도가 25 °C이고 압력이 1 atm일 때 22.4 L의 부피를 차지한다. 용기 내 증류수의 증기압은 무시한다.

충분한 시간이 흐르면, **그림 4-2**와 같이 오른쪽 용기의 피스톤은 아래로 내려가서 피스톤의 끝이 용액에 닿게 된다. 반면에 왼쪽 용기의 피스톤은 아래로 약간만 내려간다.

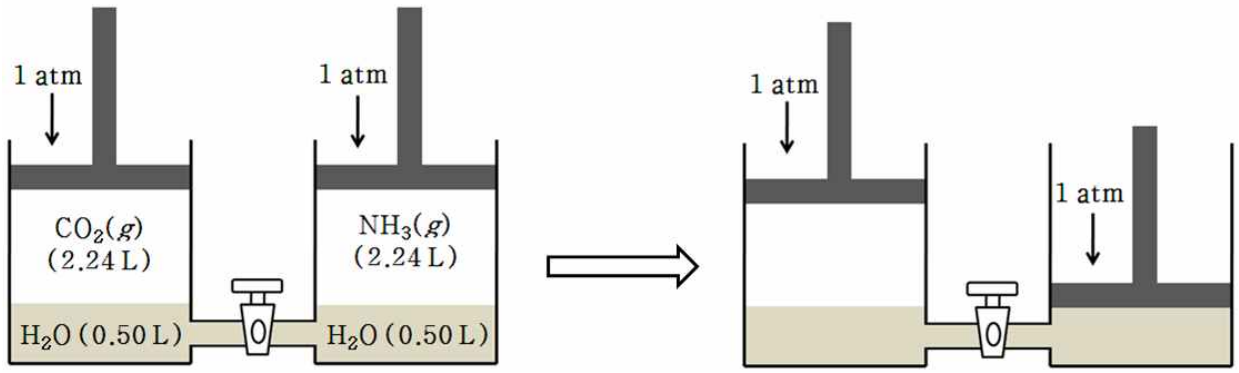


그림 4-1. 초기 상태 **그림 4-2. 충분한 시간이 흐른 후**

논제 4. (선택) 위의 제시문 **(마)~(아)**를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(a) 제시문 **(마)**에 근거하여, 이산화탄소(CO_2), 암모니아(NH_3), 물(H_2O)의 극성을 분자구조를 이용해 논하시오.

(b) 이산화탄소와 암모니아의 헨리상수가 다른 이유를 제시문 **(바)**와 논제 **4(a)**에 근거하여 논하시오. 또한, **그림 4-2**에서 왼쪽 용기와 오른쪽 용기에서 피스톤의 높이가 달라진 이유를 헨리상수를 이용하여 정량적으로 설명하시오.

(c) **그림 4-2**의 상태에서 두 용기 중간에 있는 밸브를 연 후 충분한 시간이 흐르면 왼쪽 용기의 피스톤이 내려가서 용액에 닿게 된다. 어떤 반응이 일어나는지 쓰고, 이런 현상이 일어나는 이유를 설명하시오.

(d) 논제 **4(c)**에서 서로 섞인 전체 용액의 산도(즉, 산성, 중성, 또는 염기성)를 결정하시오. 이때, 용액 내에 가장 많이 존재하는 이온 화학종 두 가지를 쓰고, 두 화학종이 용액의 산도를 결정하는 데 어떠한 역할을 하는지 설명하시오.

(자)

'시냅스 전달'은 시냅스를 통하여 한 뉴런에서 다음 뉴런으로 흥분이 전달되는 과정이다. 시냅스 전달의 특성에 관한 논의는 오랫동안 지속되었다. 시냅스 전달이 빠르게 일어난다는 사실을 근거로 시냅스에 전류가 직접 흐른다고 보는 '전기적 시냅스 가설'과 전기적 신호가 축색 말단에서 화학적 신경전달물질을 분비시켜 시냅스 전달이 일어나는 것이라는 '화학적 시냅스 가설'이 대립하였다. 두 뉴런 간 직접 전류를 통과시키는 전기적 시냅스도 소수 존재하지만, 인간 신경계의 대부분은 화학적 시냅스로 이루어져 있다. 근육의 수축을 조절하는 운동 뉴런과 근육세포 사이의 시냅스는 아세틸콜린을 신경전달물질로 이용하는 대표적인 화학적 시냅스이다.

(차)

면역 반응에는 다양한 세포들이 관여하며, B 림프구는 이물질에 대한 항체를 만들어 이물질을 무력화시키는 역할을 수행한다. 그러나 자신의 몸에서 생성된 정상 단백질을 림프구가 이물질로 인식하여 항체를 생성하면 자가면역질환이 발생한다.

(카)

축색의 전도도는 길이 상수 λ에 비례하는데 λ는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \sqrt{\frac{R_m}{\rho} \cdot \frac{a}{2}}$$

(R_m : 축색막의 단위면적당 저항, ρ : 축색 내 세포질의 비저항, a : 축색의 지름)

(타)

사람의 피부 감각에는 온각, 냉각, 촉각, 압각, 통각 등이 있다. 온도와 압력 등의 자극이 진피 속에 분포한 각기 다른 감각 수용체를 활성화시키면 각각의 신호가 대뇌에 전해짐으로써 이들 감각이 인지된다. 이들 신호를 피부로부터 뇌로 전달하는 축색들은 그 굵기에 따라 Aβ형, Aδ형, C형 축색 등으로 분류된다. 특히 C형 축색은 다른 축색들과 달리 수초로 싸여 있지 않다는 특징이 있다. 감각 수용체의 종류에 따라 연결되는 축색의 종류가 다른데, 촉각은 주로 Aβ형 축색, 온각과 냉각은 Aδ형 축색, 그리고 통각은 Aδ형 또는 C형 축색에 의해 전달된다.

논제 5. (선택) 위의 제시문 **(자)**~**(타)**를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(a) 시냅스 전달을 알아보기 위하여 아래 **그림 5-1**과 같이 뉴런 1의 축색 말단과 그 신호를 전달받는 뉴런 2로부터 막전위를 측정하였다. 뉴런 1의 축색 말단에 자극용 전극을 넣어 인위적으로 전류를 주입하여 탈분극을 유도했을 때 **그림 5-2**와 같은 막전위 변화가 나타났다. 뉴런 1이 아닌 뉴런 2의 수상돌기 부위에 전류를 주입할 경우의 막전위 변화를 예측하고 그 결과를 바탕으로 주어진 두 뉴런 사이 시냅스 전달의 특성을 제시문 **(자)**를 근거로 논술하시오.

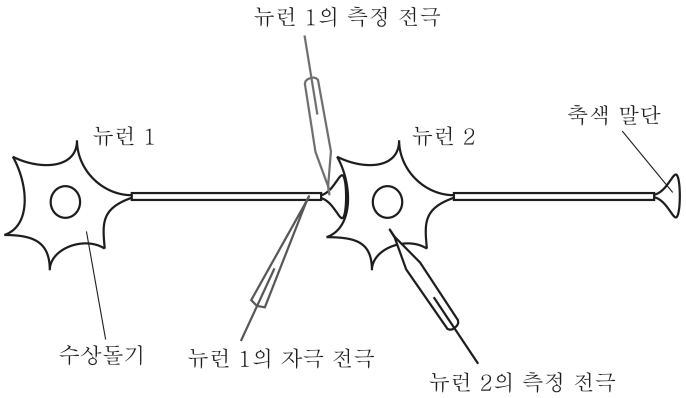


그림 5-1

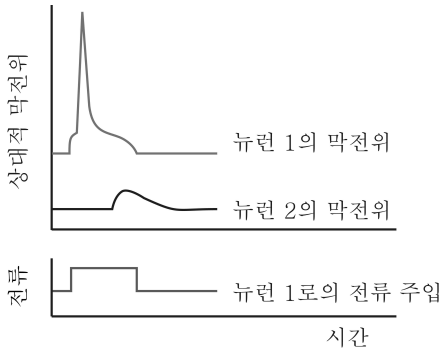
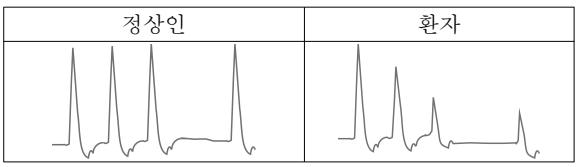
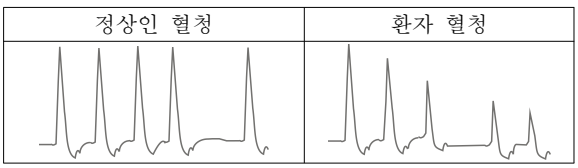


그림 5-2

(b) 중증근무력증은 점진적으로 근육이 약화되어 의지대로 근육을 움직이지 못하는 자가면역질환이다. 이 질병은 운동 뉴런과 근육세포 사이의 시냅스 전달 이상으로 발생한다. 그러나 환자의 운동 뉴런을 자극한 후 시냅스에서 분비되는 아세틸콜린의 농도는 정상인과 차이가 없었다. 운동 뉴런의 활성을 차단한 후 근육세포 위에 아세틸콜린을 직접 가하여 유발된 근육세포의 막전위 변화는 아래와 같았다.



또한 정상인의 혈청 또는 환자의 혈청이 포함된 배지를 사용하여 정상인의 운동 뉴런과 근육세포를 혼합하여 배양하였다. 운동 뉴런을 자극하여 유발된 근육세포의 막전위 변화는 아래와 같았다.



위 질병의 원인을 제시문 **(자)**와 **(차)**에 근거하여 추론하시오.

(c) 영희는 무심코 방바닥에 떨어진 뾰족한 물체를 밟았다. 물체를 밟는 순간에는 무언가가 닿는다는 느낌만을 받았지만 곧이어 극심한 고통을 느꼈다. 발을 뗀 후 처음의 통증이 사라진 다음에도 얼얼한 느낌의 통증이 한동안 지속되었다. 물체를 밟은 후 위와 같이 서로 다른 감각(촉각, 첫 번째 통각, 두 번째 통각)을 인지하는 시간적 차이가 나는 이유를 제시문 **(카)**와 **(타)**를 근거로 설명하시오.

(파)

○ 지구에 네 번째로 많이 존재하는 원소인 철(Fe)은 광합성과 같은 생물 작용에 필요하며, 지각-대기-해양이 상호 연계된 생지화학 순환과정을 통해 지구환경에 매우 중요한 역할을 한다.

○ 대기 중 먼지(dust)에는 철과 같은 지각 구성 성분을 함유한 토양 입자가 많이 포함되어 있는데, 이들 입자는 대기 순환과 더불어 멀리 이동될 수 있다. 사하라 사막과 중국 사막 지역에서 기원한 토양 입자는 각각 대서양과 태평양으로 이동되는데, 특히 중국에서 발생하는 황사는 우리나라와 일본, 태평양을 지나 북미 대륙에서도 관측된다. 황사가 태평양에 떨어지면 식물플랑크톤의 생장을 촉진하여 생산성을 증가시킬 수 있다. 한편, 흥미롭게도 북태평양 중앙의 표층 해수에서는 생물의 생장에 필요한 질소와 인 등의 영양염 농도가 낮지 않지만 생물의 생산성은 낮게 관측되고 있다.

○ 철은 주로 Fe(II)와 Fe(III)의 두 가지 산화 상태를 가지는 다양한 화합물로 존재하는데, 그 존재 형태와 물에서의 용해도는 매질의 산화-환원 조건 및 pH에 민감하다. 약알칼리성의 해수에서는 철의 용해도가 매우 낮으므로 생물이 흡수할 수 있는 용존된 철의 농도는 매우 낮다.

○ 화석연료의 연소 과정에서 대기 중으로 배출된 황산화물과 질소산화물은 이동하는 과정 중에 아래와 같은 일련의 산화 과정을 거쳐 변환되어 최종적으로 육지나 해양으로 떨어진다.

1) 기체상에서의 반응

$SO_2(g) + \bullet OH + H_2O(g) + O_2 \rightarrow H_2SO_4(g) + \bullet HO_2$ (3단계 반응)

$NO_2(g) + \bullet OH \rightarrow HNO_3(g)$ ($\bullet$ 은 라디칼을 나타냄)

2) 액체상(에어로졸, 구름, 빗방울 등)에서의 반응

$SO_2(g) + H_2O(l) \rightleftharpoons SO_2 \cdot H_2O(aq)$

$SO_2 \cdot H_2O(aq) + H_2O_2(aq) \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-} + H_2O(l)$ (2단계 반응)

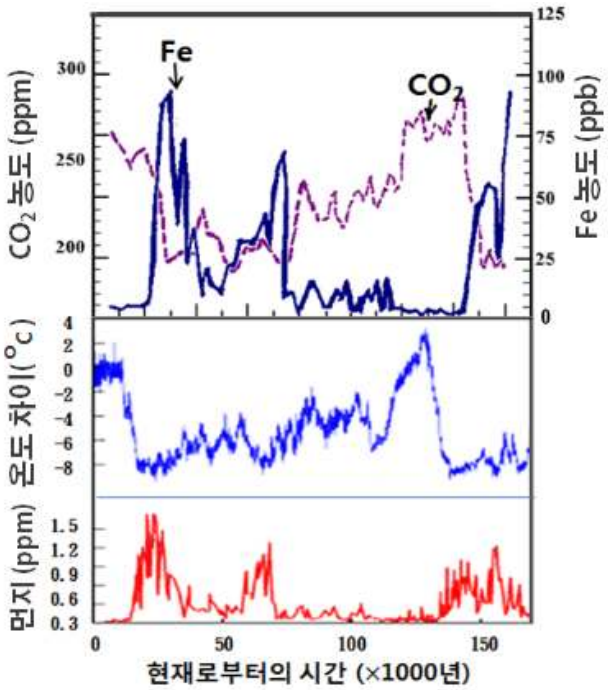


그림 6. 빙하시추공 기포 안의 CO_2 농도, 얼음에 포함된 철과 먼지(dust)의 함량, 현재와의 온도 차이 (ppm : 백만분의 일, ppb: 십억분의 일)

<출처 : Petit 외, 1999>

논제 6. (선택) 위의 제시문 **(파)**를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(a) 중국에서 배출된 황산화물과 질소산화물(같은 양이 배출된다고 가정)은 편서풍을 따라 동쪽으로 이동하여, 황해 위를 지나거나 만주 대륙 위를 지나 우리나라로 오게 된다. 이 두 가지 경로에 대해 우리나라 환경에 미칠 수 있는 영향이 어떻게 다를지 주어진 화학반응식을 근거로 설명하시오.

(b) 그림 6은 극지방에서 시추하여 채취한 빙하 시료를 분석하여 얻은 과거의 CO_2, 철, 먼지의 농도 변화이다. 시간에 따른 온도 차이는 당시의 온도가 현재를 기준으로 높았거나(양의 값) 낮았음(음의 값)을 의미한다. 이러한 과거 지구환경 기록으로부터 유추할 수 있는 철-CO_2-기후 사이의 상관성을 논하시오. 또한, 그 상관성을 응용하여 현재 당면한 지구온난화 문제를 해결할 수 있는 구체적인 지구공학적 방안을 제시하시오.

(c) 황사 입자가 다량의 황산화물 및 질소산화물과 함께 이동하게 되면 황사 입자 안에 포함된 철화합물(고체)의 용해도가 증가한다. 오염 물질과 함께 이동하는 황사가 아주 멀리 이동하여 북태평양 중앙의 표층 해수에 떨어졌다고 하자. 이 경우 지구온난화에 미치게 될 영향을, 순수한 황사 입자만이 이동되어 북태평양 표층 해수에 떨어졌을 때의 영향과 비교하시오.