모의 논술고사 해설지 (자연계열)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 85점)

실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=3^{3x}+3^{-3x}-3(3^{2x}+3^{-2x})-2(3^{1+x}+3^{1-x})+a \quad (x\geq 0)$$

라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(a) 함수 $f(x)$가 최소가 되는 x의 값을 모두 구하여라. (30점)

(b) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서만 만나도록 하는 a의 값을 모두 구하여라. (55점)

[예시 답안]

(a) $3^x+3^{-x}=t$로 치환하면 $t\geq 2$이고, 함수 $f(x)=h(t)=t^3-3t^2-9t+6+a$이다. 이때 $h'(t)=3(t-3)(t+1)$이고, 함수 $h(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	$a-16$	$\searrow$	$a-21$	$\nearrow$

따라서 $h(t)$는 $t=3$에서 최솟값 $a-21$을 갖는다. 이때 x는 $3^x+3^{-x}=3$을 만족해야 하므로 $x=\log_3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$이다.

(b) $x>0$일 때 $\frac{dt}{dx}=3^x\ln 3-3^{-x}\ln 3=(3^x-3^{-x})\ln 3>0$이므로, $t=3^x+3^{-x}$는 $x\geq 0$에서 증가한다. 함수 $y=h(t)$의 그래프가 t축과 한 점에서만 만나기 위해서는 $a<16$이거나 $a=21$이어야 한다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서만 만나려면 $a<16$이거나 $a=21$이어야 한다.

[문제 2] (총 95점)

점 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$를 지나는 두 직선이 포물선 $y^2=4x$ 위의 서로 다른 두 점 Q, R에서 각각 접한다.

(a) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$의 내적을 α와 β에 대한 식으로 표현하여라. (70점)

(b) $\angle\mathrm{QPR}$가 직각이 되는 점 P를 모두 구하여라. (25점)

[예시 답안]

(a) 점 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$를 지나는 직선 $y=mx+\beta-m\alpha$가 포물선과 접한다고 하자. 이 접선의 방정식을 포물선의 방정식에 대입하여 얻은 이차방정식 $m^2x^2+2\{m(\beta-\alpha m)-2\}x+(\beta-\alpha m)^2=0$의 판별식 $\frac{D}{4}=\alpha m^2-\beta m+1=0$이다. 점 P를 지나며 서로 다른 두 점에서 각각 접하는 두 접선의 기울기는 서로 달라야 하므로 이 m에 관한 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 $\beta^2-4\alpha>0$이어야 한다. 또한 두 접선의 기울기 m_1과 m_2는 $m_1m_2=\frac{1}{\alpha}$과 $m_1+m_2=\frac{\beta}{\alpha}$를 만족한다. 포물선 위의 점 (x_1,y_1)에서 접선의 기울기는 $\frac{2}{y_1}$이므로 두 접점은 $Q\left(\frac{1}{m_1^2},\frac{2}{m_1}\right)$와 $\mathrm{R}\left(\frac{1}{m_2^2},\frac{2}{m_2}\right)$이고

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{1}{m_1^2}-\alpha,\frac{2}{m_1}-\beta\right)\cdot\left(\frac{1}{m_2^2}-\alpha,\frac{2}{m_2}-\beta\right)=4\alpha^2+4\alpha-\alpha\beta^2-\beta^2$$

이다.

(b) $\angle\mathrm{QPR}$가 직각이 되기 위해서는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$이어야 한다. (a)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=4\alpha^2+(4-\beta^2)\alpha-\beta^2=(\alpha+1)(4\alpha-\beta^2)=0$이다. (a)의 답안에서 $\beta^2-4\alpha>0$이므로 $\alpha=-1$이다. 따라서 정답은 직선 $x=-1$ 위의 모든 점이다.

[문제 3] (총 105점)

다음 물음에 답하여라.

(a) 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\cos x \geq 1-\frac{x^2}{2}$이 성립함을 보여라. (35점)

(b) 곡선 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right)$와 x축으로 둘러싸인 영역(경계 포함)을 S라 하자. 영역 S에 포함되는 원의 반지름의 길이의 최댓값을 구하여라. (70점)

[예시 답안]

(a) 함수 $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$의 그래프는 y축 대칭이므로 $x\geq 0$일 때 $f(x)\geq 0$임을 보이면 된다. $f'(x)=-\sin x+x$이고 $f''(x)=-\cos x+1\geq 0$이므로, $f'(0)=0$이며 $f'(x)$는 $x\geq 0$일 때 증가하므로 $f'(x)\geq 0$이다. 그러므로 $x\geq 0$일 때 $f(x)$는 증가한다. $f(0)=0$이므로 $f(x)\geq 0$이다.

(b) 원 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=0$에 동시에 접하면서 최대의 반지름을 갖는다. 따라서 $-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$일 때 $\cos x\geq \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$임을 보이면 반지름의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이 된다. 이 원이 영역 S에 포함됨을 보이자. (a)에 의해서 모든 실수 x에 대하여 $\cos x\geq 1-\frac{x^2}{2}$이므로, $-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\leq 1-\frac{x^2}{2}$임을 보이면 된다.

$$\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\leq 1-\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\leq \frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}$$

이고, $-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$일 때

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\right)^2=\frac{x^4+2x^2}{4}\geq 0$$

이므로

$$-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}\text{일 때 } \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\leq 1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x$$

이다. 따라서 구하는 반지름의 길이의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

[문제 4] (총 115점)

4 이상의 자연수 n에 대하여 $1, 2, \cdots, n$ 중 서로 다른 네 수를 임의로 선택한 후, 두 개씩 두 묶음으로 나누어 각 묶음의 합을 서로 같게 만들 수 있을 때, 이 선택을 균형 선택이라고 하자.

(a) 네 수를 임의로 고르는 선택이 균형 선택일 확률을 구하여라. (55점)

(b) 네 수를 임의로 고르는 선택이 균형 선택인 경우, 그 네 수 중에서 두 번째로 작은 수와 세 번째로 작은 수가 연속한 자연수일 확률을 구하여라. (60점)

[예시 답안]

(a) 선택된 네 수를 a, b, c, d $(a<b<c<d)$라 하자. 이 선택이 균형 선택이려면 $a+d=b+c$이어야 한다. 이때 $b-a=d-c=l$이라 하면 네 수는 a, $a+l$, c, $c+l$이므로, $a+l<c$, $c+l\le n$이다. 즉, $1\le a<c-l\le n-2l$이다. 이 경우는 $1, 2, \cdots, (n-2l)$ 중에서 서로 다른 두 수를 골라 작은 수를 a로, 큰 수를 $(c-l)$로 정한 경우와 같다. 따라서 경우의 수는 ${}_{n-2l}\mathrm{C}_2$이다. (단, $n-2l\ge 2$이다.)

(i) $n=2k$(k는 2 이상의 자연수)인 경우, 균형 선택의 개수는

$$\sum_{l=1}^{k-1} {}_{2k-2l}\mathrm{C}_2=\sum_{j=1}^{k-1} {}_{2j}\mathrm{C}_2=\sum_{j=1}^{k-1} j(2j-1)=\frac{(k-1)k(4k-5)}{6}$$

이다. 전체 경우의 수는 ${}_{2k}\mathrm{C}_4$이므로, 균형 선택일 확률은

$$\frac{\frac{(k-1)k(4k-5)}{6}}{{}_{2k}\mathrm{C}_4}=\frac{4k-5}{(2k-1)(2k-3)}=\frac{2n-5}{(n-1)(n-3)}$$

이다.

(ii) $n=2k+1$(k는 2 이상의 자연수)인 경우, 균형 선택의 개수는

$$\sum_{l=1}^{k-1} {}_{2k+1-2l}\mathrm{C}_2=\sum_{j=1}^{k-1} {}_{2j+1}\mathrm{C}_2=\sum_{j=1}^{k-1} j(2j+1)=\frac{(k-1)k(4k+1)}{6}$$

이다. 전체 경우의 수는 ${}_{2k+1}\mathrm{C}_4$이므로, 균형 선택일 확률은

$$\frac{\frac{(k-1)k(4k+1)}{6}}{{}_{2k+1}\mathrm{C}_4}=\frac{4k+1}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{2n-1}{n(n-2)}$$

이다.

(b) 문제의 조건은 $c=b+1$이므로, 균형 선택인 네 수는 a, $a+l$, $a+l+1$, $a+2l+1$이다.

$1\le a<a+2l+1\le n$이므로, $1\le a\le n-2l-1$이다. 따라서 가능한 경우의 수는 $(n-2l-1)$이다. (단, $n-2l-1\ge 1$이다.)

(i) $n=2k$(k는 2 이상의 자연수)인 경우, $c=b+1$인 균형 선택의 개수는 $\sum_{l=1}^{k-1}(2k-2l-1)=(k-1)^2$이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{(k-1)^2}{(k-1)k(4k-5)}}{6}=\frac{6(k-1)}{k(4k-5)}=\frac{6(n-2)}{n(2n-5)}$$

이다.

(ii) $n=2k+1$(k는 2 이상의 자연수)인 경우, $c=b+1$인 균형 선택의 개수는 $\sum_{l=1}^{k-1}(2k-2l)=k(k-1)$이다. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{k(k-1)}{(k-1)k(4k+1)}}{6}=\frac{6}{4k+1}=\frac{6}{2n-1}$$

이다.