성신여자대학교
SUNGSHIN WOMEN'S UNIVERSITY

자연계열

지원학과(부)	성 명	생년월일 (예: 050512)						수험번호										
		⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
		①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①	①
		②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②	②
		③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③	③
		④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④	④
		⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤	⑤
		⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
		⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
		⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
		⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

유 의 사 항

1. 시험 시간은 100분입니다.

2. 답안 작성은 검은색 볼펜(연필 사용 불가)으로만 가능합니다.

3. 답안의 정해진 작성 분량을 준수하시기 바랍니다. 답안 영역에 작성한 내용만 인정됩니다.

4. 답안에 자신을 드러내거나 알릴 수 있는 표현 및 표시를 하면 안됩니다.

5. 답안지와 문제지, 연습지를 함께 제출하시기 바랍니다.

1. 문항 및 제시문

문제 1

두 이차함수 $f(x)=x^2+4x+8$과 $g(x)=x^2-4x+16$에 대하여 직선 $y=ax+b$가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 모두 접할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a, b는 상수) [총 25점]

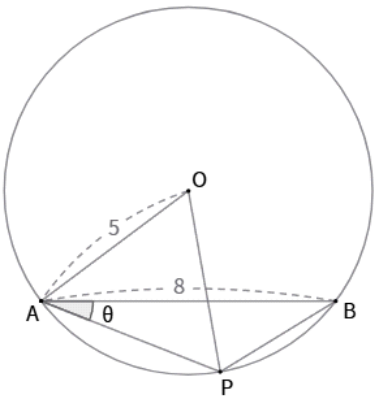
(1) 방정식 $f(x)=ax+b$와 방정식 $g(x)=ax+b$가 각각 중근을 가진다는 사실을 이용하여 a, b의 값을 각각 구하시오. [8점]

(2) 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=ax+b$와 점 $(c, f(c))$에서 접하고, 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=ax+b$와 점 $(d, g(d))$에서 접할 때 c, d의 값을 각각 구하시오. [7점]

(3) 직선 $y=ax+b$, 곡선 $y=f(x)$, 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [10점]

문제 2

중심이 점 O이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 두 점 A, B가 $\overline{AB}=8$을 만족시키고, 점 P가 작은 호 AB 위를 움직인다. $\angle PAB=\theta$라 하고, 삼각형 PAB의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 PAO의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 점 P는 점 A와 B가 아니다.) [총 25점]



(1) 선분 AB의 중점을 M이라 하고 $\angle AOM=\alpha$라고 할 때 $\sin\alpha$의 값을 구하고, 또 선분 AP의 길이를 θ와 α를 이용하여 나타내시오. [8점]

(2) $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [7점]

(3) $T(\theta)$가 최대일 때 $\sin\theta$의 값을 구하시오. [10점]

문제 3

양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=ax^2+b$와 $g(x)=c\ln x$가 다음의 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=0$이고, 닫힌구간 $[1,2]$에서 함수 $f(x)$의 평균변화율은 $\frac{3}{2}$이다.

(나) 닫힌구간 $[1,e]$에서 함수 $g(x)$의 평균변화율은 $\frac{1}{e-1}$이다.

다음 물음에 답하시오. (단, a, b, c는 상수) [총 25점]

(1) 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오. [5점]

(2) 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$가 $x=p$에서 최솟값 q를 가질 때, p, q의 값을 각각 구하시오. [10점]

(3) 문제 (2)에서 구한 상수 p에 대하여 $\lim_{x\to p}\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)}$의 값을 실수 t에 대한 함수 e^t에 평균값 정리를 적용하여 구하시오. [10점]

문제 4

자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{x+p}$과 세 직선 $x=n$, $x=n+1$, $y=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 a_n이라고 하자. $e^{a_1+a_6}=\frac{3}{2}$이 성립할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, p는 $p>-1$인 상수) [총 25점]

(1) 상수 p의 값과 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하시오. [5점]

(2) $b_n=e^{a_n}-1$이고 $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_kb_{k+1}$일 때, $q=\lim_{n\to\infty}S_n$이다. q의 값을 구하시오. [10점]

(3) (2)에서 구한 b_n, S_n, q에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 (b_n,b_n^3)에서의 접선을 l_n이라 하고, 곡선 $y=x^3$과 직선 l_n 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{(q-S_n)^4}$의 값을 구하시오. [10점]

2. 출제 의도

문제 1

이차방정식이 판별식의 의미를 이해하고, 중근을 가질 때의 조건을 활용하여 직선의 식과 접점의 x좌표를 구할 수 있는지 확인한다. 그리고 이를 이용하여 한 직선과 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 확인한다.

문제 2

삼각함수의 정의를 이용하여 $\sin\alpha$를 구하고, 원주각과 중심각의 관계를 이용하여 각을 찾은 후 사인법칙을 활용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는지 확인한다. 그리고 삼각함수를 활용하여 삼각형의 넓이를 구한 후 삼각함수의 극한을 구할 수 있는지, 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 그래프를 활용하여 삼각형의 넓이가 최대가 될 때를 찾을 수 있는지 확인한다.

문제 3

평균변화율을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는지 확인한다. 주어진 함수에서 도함수를 활용하여 최솟값을 구할 수 있는지 평가한다. 마지막으로 평균값 정리를 이해하고 있는지 확인한 후, 극한의 개념을 이해하고 함수의 극한값을 구할 수 있는지 평가한다.

문제 4

여러 가지 함수의 정적분을 계산하여 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 수열에 관련된 개념을 알고 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는지 확인한다. 마지막으로 접선의 방정식을 구할 수 있는지, 수열의 극한의 개념을 알고 계산할 수 있는지 평가한다.

3. 출제 근거

문제 1

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수학] – (1) 문자와 식 – 4 복소수와 이차방정식 [수학] – (1) 문자와 식 – 5 이차방정식과 이차함수 [수학 II] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [수학 II] – (3) 적분 – 1 부정적분과 정적분 [수학 II] – (3) 적분 – 2 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
(1)	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.
(2)	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다. [12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다.
(3)	[12수학Ⅱ03-03] 정적분의 뜻을 안다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	배종숙 외 7인	금성출판사	2024	59, 68
	수학	박교식 외 19인	동아출판	2020	50, 63
	수학 II	김원경 외 14인	비상교육	2022	71, 113, 118, 130
	수학 II	황선욱 외 8인	미래엔	2022	73, 123, 126, 140

문제 2

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수학 I] – (2) 삼각함수 – 1 삼각함수 [미적분] – (2) 미분법 – 1 여러 가지 함수의 미분
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
(1)	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
(2)	[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
(3)	[12수학 I 02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	박교식 외 19인	동아출판	2022	64, 68, 74, 87, 90, 91
	수학 I	권오남 외 14인	교학사	2020	77, 80, 93, 98, 101, 103
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2022	68, 73, 84
	미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2022	69, 77, 81

문제 3

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수학] – (4) 함수 – Ⅰ 함수 [수학 II] – (2) 미분 – Ⅰ 미분계수 [수학 II] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [미적분] – (2) 미분법 – Ⅰ 여러 가지 함수의 미분 [미적분] – (2) 미분법 – 2 여러 가지 미분법 [미적분] – (2) 미분법 – 3 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
(1)	[12수학 II 02-01]미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
(2)	[12수학 II 02-01]미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. [12수학 II 02-08]함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다. [12미적02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
(3)	[10수학04-02]함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다. [12수학 II 02-07]함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. [12미적02-01]지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	김원경 외 14인	비상	2018	209-210
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2018	224-225
	수학 II	권오남 외 14인	교학사	2018	54-55, 85-87, 91-95
	수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2018	53-54, 79-81, 86-89
	미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	21, 57-58
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	20, 59

문제 4

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[수학 Ⅰ] – (3) 수열 – 2 수열의 합 [수학 Ⅱ] – (2) 미분 – 3 도함수의 활용 [수학 Ⅱ] – (3) 적분 – 3 정적분의 활용 [미적분] – (1) 수열의 극한 – 1 수열의 극한 [미적분] – (3) 적분법 – 2 정적분의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
(1)	[12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
(2)	[12수학Ⅰ03-05] 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
(3)	[12수학Ⅱ02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학Ⅱ03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다. [12미적01-02]수 열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학	박교식 외 19인	동아출판	2018	105-106
	수학	황선욱 외 8인	미래엔	2018	121-122
	수학 Ⅱ	권오남 외 14인	교학사	2018	80-82, 142-148
	수학 Ⅱ	이준열 외 9인	천재교육	2018	74-76, 132-138
	미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	17-22
	미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	11-20

4. 문항 해설

문제 1

중근을 가질 조건을 이차방정식의 판별식을 이용하여 나타낸 후 직선 $y=ax+b$의 기울기 a, y절편 b의 값 및 접점의 x좌표를 구한다. 또 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 구한 후 정적분을 활용하여 직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=f(x)$ 그리고 직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 식으로 나타내고 그 값을 구한다

문제 2

직각삼각형 AOM에서 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$임을 알고, 또 원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle \mathrm{BPA}=\pi-\alpha$임을 이용하여 삼각형 PAB에서 $\angle \mathrm{ABP}=\alpha-\theta$로 나타낼 수 있다. 그리고 사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{AP}}=10\sin(\alpha-\theta)$임을 얻는다. 또 삼각형 PAB의 넓이는 $S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\theta$로 나타낼 수 있으므로 $S(\theta)=40\sin\theta\sin(\alpha-\theta)$이고, 삼각함수의 극한을 이용하여 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구한다. 그리고 삼각형 PAO의 넓이는 $\mathrm{T}(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta\right)$로 나타낼 수 있으므로 $T(\theta)=25\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)$이고, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $T(\theta)=\frac{25}{2}\sin(2(\alpha-\theta))$로 나타내어, 최대가 될 때 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$임을 찾아 $\sin\theta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구한다.

문제 3

주어진 조건 (가), (나)를 이용하여 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=1$임을 구한다. 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ $=\frac{x^2-1}{2}-\ln x$의 도함수를 활용하여 $x=1$에서 극솟값 및 최솟값을 가짐을 확인하고 그 때의 최솟값이 $h(1)$임을 구한다. 마지막으로 $x\neq 1$인 양수 x에 대하여 항상 $f(x)>g(x)$이므로 평균값 정리에 의해 $\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=e^z$인 z가 열린구간 $(g(x), f(x))$에 적어도 하나 존재함을 보인 후, 지수함수는 증가함수이므로 부등식 $e^{g(x)}<\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=e^z<e^{f(x)}$을 이용하여 극한값을 구한다.

문제 4

한 곡선과 세 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 활용하여 구한 후 주어진 조건 $e^{a_1+a_6}=\frac{3}{2}$를 이용하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구한다. 새로운 수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n을 구한 후 이를 활용하여 제n항까지의 합 S_n을 구하고, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구한다. 마지막으로 (2)에서 구한 b_n, S_n, $\lim_{n\to\infty}S_n=q$ 등을 이용하여 곡선 위의 점에서의 접선과 곡선 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 A_n을 정적분을 활용하여 구한 후 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{(q-S_n)^4}$를 구한다.

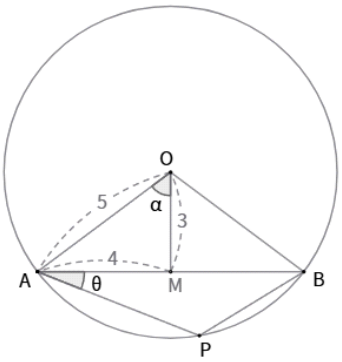
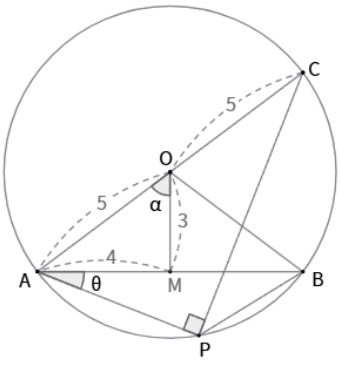
5. 채점 기준

문제 1

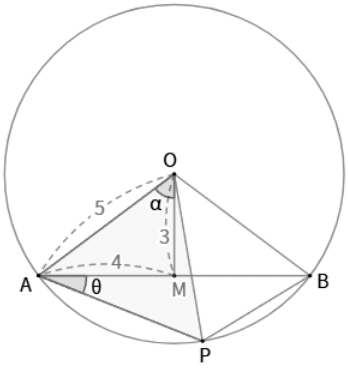
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	① 방정식 $f(x)=ax+b$, 즉 $x^2+(4-a)x+8-b=0$은 중근을 가지므로 판별식 $D_1=0$. $D_1=(4-a)^2-4(8-b)=0$, 즉 $a^2-8a+4b-16=0$이다. ② 방정식 $g(x)=ax+b$, 즉 $x^2-(4+a)x+16-b=0$도 중근을 가지므로 판별식 $D_2=0$. $D_2=(4+a)^2-4(16-b)=0$, 즉 $a^2+8a+4b-48=0$이다. ③ 두 식을 연립하면 $16a-32=0$이므로 $a=2$ ④ 따라서 $4b=-a^2+8a+16=28$이므로 $b=7$ **[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우 • 3등급: ③단계까지만 맞은 경우 • 4등급: ②단계까지만 맞은 경우 • 5등급: ①단계 또는 ②단계 중 하나만 맞은 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	8점
(2)	① $x=c$는 방정식 $f(x)=ax+b$, 즉 $x^2+4x+8=2x+7$의 중근이므로 ② $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $c=-1$ ③ $x=d$는 방정식 $g(x)=ax+b$, 즉 $x^2-4x+16=2x+7$의 중근이므로 ④ $x^2-6x+9=(x-3)^2=0$에서 $d=3$ [별해] ① $f'(c)=2$ 이어야 하므로 ② $2c+4=2$이고, $c=-1$ 이다 ③ $f'(d)=2$ 이어야 하므로 ④ $2d-4=2$이고, $d=3$이다. **[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우 • 3등급: ③단계까지만 맞은 경우 • 4등급: ②단계까지만 맞은 경우 • 5등급: ①단계 또는 ②단계 중 하나만 맞은 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	7점

하위 문항	채점 기준	배점
(3)	① 먼저 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 구하면 $x^2+4x+8=x^2-4x+16$에서 $8x=8$, 즉 $x=1$이다. ② 따라서 넓이는 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-(2x+7)\}dx+\int_{1}^{3}\{g(x)-(2x+7)\}dx$ ③ 여기에서 $\int_{-1}^{1}\{f(x)-(2x+7)\}dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$ ④ 그리고 $\int_{1}^{3}\{g(x)-(2x+7)\}dx=\int_{1}^{3}(x-3)^2dx=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}$ ⑤ 따라서 직선 $y=2x+7$과 곡선 $y=f(x)$ 및 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$이다. **[채점 기준]** • 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 • 2등급 : ①~④단계를 옳게 서술하고 ⑤의 과정에서 오류가 있는 경우 • 3등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 1개 있는 경우 • 4등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 2개 이상인 경우 • 5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	10점

문제 2

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	① 직각삼각형 AOM에서 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$이다. ② 원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle BPA=\pi-\alpha$이고 ③ 삼각형 PAB에서 $\angle ABP=\pi-(\angle PAB+\angle BPA)$ $=\pi-(\pi-\alpha+\theta)=\alpha-\theta$이다. ④ 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ABP)}=2\times(\text{외접원의 반지름})$ $=10$ 이므로 ⑤ $\overline{AP}=10\sin(\angle ABP)=10\sin(\alpha-\theta)$ 이다.  [별해] ① 직선 OA와 원이 만나는 A가 아닌 점을 C라 하면 ② 삼각형 ACP는 선분 AC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다. ③ $\overline{AC}=10$이고 ④ $\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta$ 이므로 ⑤ $\overline{AP}=10\cos(\angle PAC)=10\sin(\alpha-\theta)$이다.  **[채점 기준]** • 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 • 2등급 : ①~④단계를 옳게 서술하고 ⑤의 과정에서 오류가 있는 경우 • 3등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 1개 있는 경우 • 4등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 2개 이상인 경우 • 5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	8점
(2)	① $S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin\theta$로 구할 수 있으므로 ② $S(\theta)=\frac{1}{2}\times8\times10\sin(\alpha-\theta)\times\sin\theta=40\sin(\alpha-\theta)\times\sin\theta$ ③ $\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$이고, $\lim_{\theta\to0+}\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 이므로 ④ $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}40\frac{\sin\theta}{\theta}\sin(\alpha-\theta)=40\times1\times\frac{4}{5}=32$ 이다.	7점

하위 문항	채점 기준	배점
(2)	**[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우 • 3등급: ③단계까지만 맞은 경우 • 4등급: ②단계까지만 맞은 경우 • 5등급: ①단계 또는 ②단계 중 하나만 맞은 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	7점
(3)	① $T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AO}\times\overline{AP}\times\sin(\angle PAO)$ $=\frac{1}{2}\overline{AO}\times\overline{AP}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta\right)$이므로 ② $T(\theta)=\frac{1}{2}\times5\times10\sin(\alpha-\theta)\times\cos(\alpha-\theta)$ $=25\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)$ 이다. ③ 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $T(\theta)=\frac{25}{2}\sin(2(\alpha-\theta))$ 이다. ④ $0<\alpha-\theta<\alpha$이고, α는 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ 인 상수이므로, ($\because \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$), $\alpha-\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, 즉 $2(\alpha-\theta)=\frac{\pi}{2}$일 때, $T(\theta)$는 최댓값을 갖는다. ⑤ 이때 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\sin\theta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$ $=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$ 이다. [별해] ①~② 동일 ③ $T'(\theta)=-25\cos^2(\alpha-\theta)+25\sin^2(\alpha-\theta)=0$는 $\tan^2(\alpha-\theta)=1$일 때 성립. $0<\alpha-\theta<\alpha$이고, α는 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ 인 상수이므로, ($\because \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$), $\alpha-\theta=\frac{\pi}{4}$, 즉 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$일 때 $T'(\theta)=0$이다. ④ $\theta<\alpha-\frac{\pi}{4}$ 일 때 $T'(\theta)>0$ 이고, $\theta>\alpha-\frac{\pi}{4}$ 일 때 $T'(\theta)<0$이므로 $T(\theta)$는 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$일 때 최댓값을 갖는다. ⑤ 동일	10점



하위 문항	채점 기준	배점
(3)	**[채점 기준]** • 1등급 : 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 답도 맞음 • 2등급 : ①~④단계를 옳게 서술하고 ⑤의 과정에서 오류가 있는 경우 • 3등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 1개 있는 경우 • 4등급 : ①~④단계까지 계산을 시도했으나 오류가 2개 이상인 경우 • 5등급 : ①단계까지만 옳게 제시한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	10점

※ 하위 문항이 있는 경우 칸을 나누어 채점 기준을 작성함.
※ 채점 기준은 문항의 출제의도에 대한 평가를 위한 것이어야 함.

문제 3

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	① 조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로 $a+b=0$이다. ② 또 $(4a+b)-(a+b)=\frac{3}{2}$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다. ③ 따라서 $b=-\frac{1}{2}$이다. ④ 조건 (나)에서 $\frac{c\ln e-c\ln 1}{e-1}=\frac{1}{e-1}$이므로 $c=1$이다. **[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: a, b, c중 두 개를 맞게 구한 경우 • 3등급: a, b, c중 한 개를 맞게 구한 경우 • 4등급: a, b에 대한 식과 c에 대한 식 모두 맞게 제시한 경우 • 5등급: a, b에 대한 식 혹은 c에 대한 식 중 하나를 맞게 제시한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	5점
(2)	① 함수 $h(x)=\frac{x^2-1}{2}-\ln x$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. ② $h(x)$의 최솟값을 구하기 위해 미분하면 $h'(x)=x-\frac{1}{x}$이므로 $h'(1)=0$이고, ③ $h''(1)=2>0$이므로 (또는 $x<1$일 때, $h'(x)<0$이고 $x>1$일 때, $h'(x)>0$이므로) ④ 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖고 그 값은 $h(1)=0$이다.	10점

하위 문항	채점 기준	배점
(2)	**[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우 • 3등급: 함수 $h(x)$의 기울기가 0이 나오는 부분이 극솟점임을 확인한 경우 • 4등급: 함수 $h(x)$의 기울기가 0이 나오는 부분을 찾은 경우 • 5등급: 함수 $h(x)$의 기울기가 0이 나오는 부분을 찾으려 시도한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	10점
(3)	① (2)의 결과에서 $p=1$이고, $x \neq 1$인 양수 x에 대해 항상 $f(x) > g(x)$이다. 이때 실수 t에 대한 함수 e^t는 닫힌구간 $[g(x), f(x)]$에서 연속이고 열린구간 $(g(x), f(x))$에서 미분가능하다. ② 따라서 실수 t에 대한 함수 e^t에 평균값 정리에 의해 $\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)} = e^z$를 만족시키는 실수 z가 열린구간 $(g(x), f(x))$에 적어도 하나 존재한다. 이때 $g(x) < z < f(x)$가 성립한다. ③ 그리고 실수 t에 대한 함수 e^t는 증가함수이므로 $e^{g(x)} < e^z < e^{f(x)}$이다. 따라서 $e^{g(x)} < \frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)} < e^{f(x)}$이다. ④ 여기에서 $\lim_{x\to 1} e^{g(x)} = e^{g(1)} = e^0 = 1$ 이고, $\lim_{x\to 1} e^{f(x)} = e^{f(1)} = e^0 = 1$이므로, $\lim_{x\to p} \frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)} = 1$이다. **[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: ④단계까지의 과정 중 계산 실수가 있는 경우 • 3등급: $f(x) > g(x)$를 제시하고 이용하려 시도한 경우 • 4등급: $f(x) \geq g(x)$를 이용하려 시도한 경우 • 5등급: 평균값 정리를 맞게 제시하고 이용하려 시도한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	10점

문제 4

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	① 넓이 a_n은 $a_n=\int_n^{n+1}\frac{1}{x+p}\,dx=\ln\left\|\frac{n+1+p}{n+p}\right\|$이다. ② 그런데 $p>-1$이므로 $n+p>0$이고 $a_n=\ln\frac{n+1+p}{n+p}$ 이다. ③ 따라서 $e^{a_n}=\frac{n+1+p}{n+p}$이고, 조건 $e^{a_1+a_6}=\frac{3}{2}$로 부터 $\frac{2+p}{1+p}\cdot\frac{7+p}{6+p}=\frac{3}{2}$, $(p-2)(p+5)=0$이므로, ④ $p=2$, $a_n=\ln\frac{n+3}{n+2}$이다. **[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: a_n을 구했으나 값이 잘못된 경우 • 3등급: $e^{a_1+a_6}=\frac{3}{2}$을 이용하여 p를 구하려고 시도한 경우 • 4등급: ②까지 계산을 시도한 경우 • 5등급: a_n에 대한 식을 적분을 이용해 제시한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	5점
(2)	① $e^{a_n}=\frac{n+3}{n+2}$이므로 $b_n=e^{a_n}-1=\frac{1}{n+2}$이다. ② $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+2)}-\frac{1}{(k+3)}\right\}$ ③ 따라서 $S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$이다. ④ $q=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$이다. **[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: (1)에서 a_n을 잘못 구했으나 전 과정이 맞은 경우 혹은 계산 중 한 부분이 잘못된 경우 • 3등급: S_n의 극한을 계산하려 시도한 경우 • 4등급: b_n을 대입하여 S_n의 계산을 시도한 경우 • 5등급: b_n을 계산하려 시도한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	10점

하위 문항	채점 기준	배점
(3)	① 직선 l_n의 방정식은 $y-b_n^3=3b_n^2(x-b_n)$이므로, 정리하면 $y=3b_n^2x-2b_n^3$이다. ② (2)에서 $b_n=\frac{1}{n+2}>0$이므로, 곡선 $y=x^3$은 접선 l_n보다 위에 위치한다. ③ 따라서 $A_n=\int_0^{b_n}\left(x^3-3b_n^2x+2b_n^3\right)dx=\frac{3}{4}b_n^4=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n+2}\right)^4$이다. ④ 이때 $q-S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+3}=\frac{1}{n+3}$이므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{(q-S_n)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^4=\frac{3}{4}$이다. **[채점 기준]** • 1등급: 전 과정이 모두 맞거나, 일부 생략이 있으나 전체 오류가 없고 결론이 맞음 • 2등급: (2)에서 b_n을 잘못 구했으나 전 과정이 맞은 경우 혹은 계산 중 한 부분이 잘못된 경우 • 3등급: $\frac{A_n}{(q-S_n)^4}$의 극한을 계산하려 시도한 경우 • 4등급: 넓이를 계산하려 시도한 경우 • 5등급: 접선의 방정식을 계산하려 시도한 경우 • 6등급: 문제를 푸는 과정이 전혀 틀린 경우 • 7등급: 백지 답안	10점

6. 예시 답안

문제 1

(1) 이차방정식의 판별식을 이용하여 중근을 가질 조건을 나타내고 직선 $y=ax+b$의 기울기 a와 y절편 b의 값을 구한다.

방정식 $f(x)=ax+b$, 즉 $x^2+(4-a)x+8-b=0$은 중근을 가지므로, 판별식 $D_1=0$이어야 한다.

$D_1=(4-a)^2-4(8-b)=0$, 즉 $a^2-8a+4b-16=0$이다.

방정식 $g(x)=ax+b$, 즉 $x^2-(4+a)x+16-b=0$도 중근을 가지므로, 판별식 $D_2=0$이어야 한다.

$D_2=(4+a)^2-4(16-b)=0$, 즉 $a^2+8a+4b-48=0$이다.

두 식을 연립하면 $16a-32=0$이므로 $a=2$이고, $4b=-a^2+8a+16=28$이므로 $b=7$이다.

(2) 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=ax+b$와 점 $(c, f(c))$에서 접하므로 $x=c$는 방정식 $f(x)=ax+b$, 즉 $x^2+4x+8=2x+7$의 중근이다. 따라서 $x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $c=-1$이다.

곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=ax+b$와 점 $(d, g(d))$에서 접하므로 $x=d$는 방정식 $g(x)=ax+b$, 즉 $x^2-4x+16=2x+7$의 중근이다. 따라서 $x^2-6x+9=(x-3)^2=0$에서 $d=3$이다.

[별해]

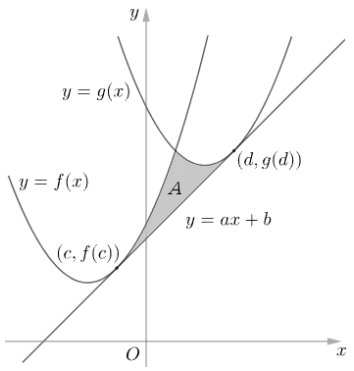
$f'(c)=2$ 이어야 하므로 $2c+4=2$, $c=-1$ 이다.

$f'(d)=2$ 이어야 하므로 $2d-4=2$, $d=3$ 이다.

(3) 문제에서 구하고자 하는 부분의 넓이를 A라 하자.

먼저 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 구하면 $x^2+4x+8=x^2-4x+16$에서 $8x=8$, 즉 $x=1$이다.

또, 앞의 소문항 (2)에서 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=ax+b$와 $x=-1$일 때 접하고, 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=ax+b$와 $x=3$일 때 접하는 것을 확인하였다.



따라서 x축의 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이와 $[1, 3]$에서 직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 활용하여 각각 계산한 후 두 값을 합하면 직선 $y=ax+b$와 곡선 $y=f(x)$ 및 곡선 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 A를 구할 수 있게 된다.

$$A=\int_{-1}^{1}\{f(x)-(2x+7)\}\,dx+\int_{1}^{3}\{g(x)-(2x+7)\}\,dx$$

여기에서

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-(2x+7)\}\,dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx=\left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$ 이고,

$$\int_{1}^{3}\{g(x)-(2x+7)\}\,dx=\int_{1}^{3}(x-3)^2\,dx=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}$$ 이다.

따라서 $A=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$이다.

문제 2

(1) 직각삼각형 AOM에서 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$이다.

원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle BPA=\pi-\alpha$ 이고,

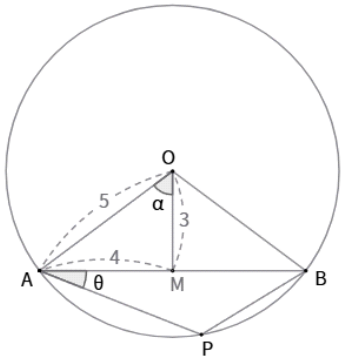
삼각형 PAB에서

$\angle ABP=\pi-(\angle PAB+\angle BPA)=\pi-(\pi-\alpha+\theta)=\alpha-\theta$ 이다.

한편, 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AP}}{\sin(\angle ABP)}=2\times(\text{외접원의반지름})=10$ 이므로

$\overline{AP}=10\sin(\angle ABP)=10\sin(\alpha-\theta)$ 이다.



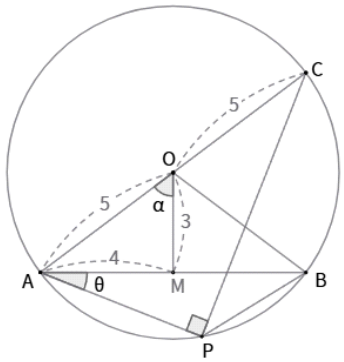
[별해]

직선 OA와 원이 만나는 A가 아닌 점을 C라 하면

삼각형 ACP는 선분 AC를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

여기에서 $\overline{AC}=10$이고 $\angle PAC=\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta$ 이므로

$\overline{AP}=10\cos(\angle PAC)=10\sin(\alpha-\theta)$ 이다.



(2) 삼각형 PAB의 넓이는 $S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin\theta$ 이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times 8\times 10\sin(\alpha-\theta)\times\sin\theta=40\sin(\alpha-\theta)\times\sin\theta$ 이다.

여기에서 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ 이고, $\lim_{\theta\to 0+}\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha=\frac{4}{5}$ 이므로

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}40\frac{\sin\theta}{\theta}\sin(\alpha-\theta)=40\cdot 1\cdot\frac{4}{5}=32$ 이다.

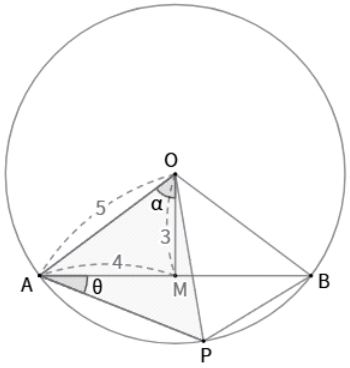
(3) 삼각형 PAO의 넓이는

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AO}}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\sin(\angle\mathrm{PAO})$$

$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AO}}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times5\times10\sin(\alpha-\theta)\times\cos(\alpha-\theta)$$

$$=25\sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha-\theta)$$ 이다.



(*)여기에서 삼각함수의 덧셈정리를 적용하면

$T(\theta)=\frac{25}{2}\sin(2(\alpha-\theta))$ 이다.

그리고 $0<\alpha-\theta<\alpha$이며,

α는 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ 인 상수이므로 ($\because \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$\alpha-\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, 즉 $2(\alpha-\theta)=\frac{\pi}{2}$일 때, $T(\theta)$는 최댓값을 갖는다.

[(*)부분의 다른 풀이_시작]

그리고 $T'(\theta)=-25\cos^2(\alpha-\theta)+25\sin^2(\alpha-\theta)=0$는 $\tan^2(\alpha-\theta)=1$일 때 성립한다.

여기에서 $0<\alpha-\theta<\alpha$이고,

α는 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{3}$ 인 상수이므로, ($\because \frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\alpha=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$),

$\alpha-\theta=\frac{\pi}{4}$, 즉 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$일 때 $T'(\theta)=0$이다.

또 $\theta<\alpha-\frac{\pi}{4}$일 때 $T'(\theta)>0$ 이고, $\theta>\alpha-\frac{\pi}{4}$일 때 $T'(\theta)<0$이므로

$T(\theta)$는 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$일 때 최댓값을 갖는다.

[(*)부분의 다른 풀이_끝]

이때 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{4}$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\sin\theta=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$ 이다.

문제 3

(1) 조건 (가)에서 $f(1)=0$이므로 $a+b=0$이고 $(4a+b)-(a+b)=\frac{3}{2}$이므로

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이다. 또 조건 (나)에서 $\frac{c\ln e-c\ln 1}{e-1}=\frac{1}{e-1}$이므로 $c=1$이다.

(2) 함수 $h(x)=\frac{x^2-1}{2}-\ln x$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $h(x)$의 최솟값을 구하기 위해 미분하면 $h'(x)=x-\frac{1}{x}$이므로 $h'(1)=0$이고,

$h''(1)=2>0$이므로

(또는 $x<1$일 때, $h'(x)<0$이고 $x>1$일 때, $h'(x)>0$이므로)

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 갖고 그 값은 $h(1)=0$이다.

(3) (2)의 결과에서 $p=1$이고, $x\neq 1$인 양수 x에 대해 항상 $f(x)>g(x)$이다. 이때 실수 t에 대한 함수 e^t는 닫힌구간 $[g(x), f(x)]$에서 연속이고 열린구간 $(g(x), f(x))$에서 미분가능하다. 따라서 실수 t에 대한 함수 e^t에 평균값 정리에 의해 $\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=e^z$를 만족시키는 실수 z가 열린구간 $(g(x), f(x))$에 적어도 하나 존재한다. 이때 $g(x)<z<f(x)$가 성립한다. 그리고 실수 t에 대한 함수 e^t는 증가함수이므로 $e^{g(x)}<e^z<e^{f(x)}$이다. 따라서 $e^{g(x)}<\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)}<e^{f(x)}$이다.

$\lim_{x\to 1} e^{g(x)}=e^{g(1)}=e^0=1$ 이고, $\lim_{x\to 1} e^{f(x)}=e^{f(1)}=e^0=1$이므로, $\lim_{x\to p}\frac{e^{f(x)}-e^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=1$이다.

문제 4

(1) 주어진 조건을 활용하여 넓이 a_n을 구하면 $a_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x+p}\,dx = \ln\left|\frac{n+1+p}{n+p}\right|$이다.

그런데 $p > -1$이므로 $n+p > 0$이고 $a_n = \ln\frac{n+1+p}{n+p}$ 이다.

따라서 $e^{a_n} = \frac{n+1+p}{n+p}$이고, 조건 $e^{a_1+a_6} = \frac{3}{2}$로부터 $\frac{2+p}{1+p} \times \frac{7+p}{6+p} = \frac{3}{2}$,

$(p-2)(p+5) = 0$이므로, $p = 2$이고 $a_n = \ln\frac{n+3}{n+2}$이다.

(2) $e^{a_n} = \frac{n+3}{n+2}$이므로 $b_n = e^{a_n} - 1 = \frac{1}{n+2}$이고 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(k+2)} - \frac{1}{(k+3)}\right\}$

따라서 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$이다. 그러므로 $q = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$이다.

(3) 직선 l_n의 방정식은 $y - b_n^3 = 3b_n^2(x - b_n)$이므로, 정리하면 $y = 3b_n^2 x - 2b_n^3$이다.

(2)에서 $b_n = \frac{1}{n+2} > 0$이므로, 곡선 $y = x^3$은 접선 l_n보다 위에 위치한다.

따라서 $A_n = \int_0^{b_n} (x^3 - 3b_n^2 x + 2b_n^3)\,dx = \frac{3}{4}b_n^4 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{n+2}\right)^4$이다.

이때 $q - S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{n+3} = \frac{1}{n+3}$이므로, $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{(q-S_n)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^4 = \frac{3}{4}$이다.