Ⅳ. 2027학년도 모의 논술고사 문제 및 해설(자연)

숭실대학교
Soongsil University

1. 문제(1) 및 제시문

문제 1 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

> 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (단, $\beta\neq 0$)를 만족하면, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ 이다.
>
> 【출처: 수학II「함수의 극한에 대한 성질」】

함수 $f(x)$는 아래의 조건을 만족하는 삼차함수이다.

> (가) $\lim_{x\to 0} x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)=2$
>
> (나) $\lim_{x\to a}\frac{f(x+5)}{(f(x)+8)(x+2)}$ 의 값이 $a=-2$일 때는 존재하고, $a=5$일 때는 존재하지 않는다.
>
> (다) 어떤 실수 k에 대하여 $\lim_{x\to k}\frac{f(x)}{(x-k)^2}$ 의 값이 존재한다.

이때 $f(1)$의 값을 구하시오.

2. 문제(1) 해설

출제 의도

극한법칙의 의미에 대한 이해도와 함수의 극한이 존재하는 경우와 존재하지 않는 경우에 대한 판단력, 그리고 이를 이용하여 함수의 성질을 올바르게 유도하는 응용력을 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정		
관련 성취기준		**과목명: 수학II**	**관련**
	성취기준 1	수학II – (1) 함수의 극한과 연속 – 1 함수의 극한 [12수학II01-01] 함수의 극한의 뜻을 안다. [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	
	성취기준 2	수학II – (1) 함수의 극한과 연속 – 2 함수의 연속 [12수학II01-04] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	황선욱 외 5명	미래엔	2019	18, 35

문항 해설

주어진 조건 (가)와 (다)를 이용하여 삼차함수의 최고차항과 인수에 대한 조건을 올바르게 도출하고, 조건(나)의 두 극한 계산 결과로부터 삼차함수의 형태를 정확히 도출하여, $x=1$에서의 함숫값을 계산하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	주어진 조건을 이용하여 $f(x)=2(x-3)^2(x-m)$ 또는 $f(x)=2(x-k)^2(x-3)$의 두 경우로 좁힐 수 있다.	10
(2)	나머지 조건을 이용하여 함수의 최종 형태 $f(x)=2(x-3)^2(x-6)$를 찾고, 답을 알맞게 도출할 수 있다.	15

예시 답안

삼차함수 $f(x)$를 $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$라고 하자. 조건 (가)에 의하면,

$$\lim_{x\to 0} x^3 f(1/x)=\lim_{x\to 0} x^3\left(\frac{\alpha}{x^3}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x}+\delta\right)=\alpha=2$$

즉, 최고차항의 계수가 2임을 알 수 있다.

또한 $f(x)$는 조건 (다)에 의해 어떤 실수 k에 대해 $(x-k)^2$를 인수로 가져야 한다. 즉, $f(x)=2(x-k)^2(x-m)$ 형태를 가진다.

조건 (나)의 첫 번째 경우로부터 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x+5)}{(f(x)+8)(x-2)}$의 극한값이 존재한다. 이때 분모의 극한값이 0이므로, 분자의 극한값도 0이 되어야 한다. 즉, $\lim_{x\to 2} f(x+1)=0$ 인데, $f(x)$는 연속함수이므로, $f(3)=0$이다. 그러므로 함수 $f(x)$는

$$f(x)=2(x-3)^2(x-m) \quad \text{또는} \quad f(x)=2(x-k)^2(x-3) \qquad \text{----------} \ (\text{I})$$

이다.

조건 (나)의 두 번째 경우로부터 $\lim_{x\to 5}\frac{f(x+5)}{(f(x)+8)(x-2)}$의 극한값이 존재하지 않는다. 이때 분모와 분자 모두 연속함수이므로, 극한이 없는 경우는 분모의 극한값은 0이어야 한다. 이때 $\lim_{x\to 5}(x-2)=3\neq 0$이므로

$$\lim_{x\to 5} f(x)+8=0 \quad \Rightarrow \quad f(5)=-8$$

이어야 한다. 이를 (I)의 두 경우에 대입하면,

$$f(5)=2(5-3)^2(5-m)=8\cdot(5-m)=-8, \text{ 또는 } f(5)=2(5-k)^2(5-3)=4(5-k)^2=-8$$

이다. 그런데 $(5-k)^2 \geqq 0$이므로, 두 번째 형태는 불가능하고, 그러므로 $8 \cdot (5-m) = -8$, 곧 $m=6$을 얻는다. 따라서 $f(x) = 2(x-3)^2(x-6)$이고,

$$f(1) = 2(1-3)^2\,(1-6) = 2(-2)^2(-5) = -40$$

이다.

3. 문제(2) 및 제시문

문제 2 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.
>
> 【출처: 미적분「미분법」】

함수 $f(x)=b^x$ $(b>1)$와 그 역함수로 정의되는 함수 $g(x)=-f^{-1}(x)$의 그래프의 교점 $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$가 $\alpha\beta^2=1$을 만족시킨다. 이때 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선 ℓ_1의 기울기와 점 P에서 곡선 $y=g(x)$에 접하는 접선 ℓ_2의 기울기의 곱을 구하시오.

4. 문제(2) 해설

출제 의도

함수의 그래프 위의 점의 의미와 지수함수와 로그함수에 대한 이해력과 미분법을 올바르게 적용하는 계산능력을 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정
관련 성취기준	

	과목명: 수학I	**관련**
성취기준 1	수학I - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수 [12수학 I 01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다. [12수학 I 01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	

	과목명: 미적분	**관련**
성취기준 1	미적분 - (2) 미분법 - 1 여러 가지 함수의 미분 [12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학I	황선욱 외 8명	미래엔	2019	41
	미적분	권오남 외 15명	교학사	2019	57

문항 해설

두 함수의 그래프가 만나는 교점이라는 조건과 점의 좌표 사이의 관계식을 이용하여 α와 β의 값을 올바르게 도출하고, 주어진 점에서 지수함수와 로그함수의 미분계수를 각각 정확하게 계산하여 최종 답을 구하는 문제이다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	주어진 교점의 좌표의 조건을 이용하여 관계식을 올바르게 도출할 수 있다.	15
(2)	각 함수에 대한 접선의 기울기를 정확히 계산할 수 있다.	10

예시 답안

점 P가 함수 $f(x), g(x)$의 그래프 위의 점이므로 다음을 만족시킨다.

$$b^{\alpha}=\beta,\ (\alpha=\log_b\beta),\quad -\log_b\alpha=\beta \qquad \text{---------- (II)}$$

점 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ 가 $\alpha\beta^2=1$ 을 만족시키므로, 양변에 로그를 취하면

$$\log_b\alpha+2\log_b\beta=0$$

위의 식에 (II)의 결과를 대입하면 다음 관계식을 얻는다.

$$\log_b\alpha+2\log_b\beta=2\alpha-\beta=0$$

즉, $\beta=2\alpha$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 도함수와 $x=\alpha$에서의 미분계수는 각각

$$f'(x)=b^x\ln b\,,\qquad f'(\alpha)=b^{\alpha}\ln b=\beta\ln b$$

이고, $f(x)$의 역함수는 $\log_b x$이므로, $g(x)$의 도함수와 $x=\alpha$에서의 미분계수는 각각

$$g'(x)=(-\log_b x)'=-\frac{1}{\ln b}\frac{1}{x},\ g'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha\ln b}$$

이다. 따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$\beta\ln b\times\left(-\frac{1}{\alpha\ln b}\right)=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{2\alpha}{\alpha}=-2$$

5. 문제(3) 및 제시문

문제 3 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

① $\sum_{n=1}^{N}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n \pm \sum_{n=1}^{N} b_n$

② $\sum_{n=1}^{N} ca_n = c\sum_{n=1}^{N} a_n$ (단, c는 상수)

③ $\sum_{n=1}^{N} c = cN$ (단, c는 상수)

【출처: 수학Ⅰ「합의 기호 $\sum$」】

첫째항과 공비 r이 모두 1보다 큰 실수인 등비수열 $\{a_n\}$과 함수 $f(x) = 2\ln x$에 대하여 $f(a_{2027}) = 19$이고, 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}_n(n, f(a_n))$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_n이라고 하자. 사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이 b_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{2027} b_n = 20270$이라 할 때, 실수 r의 값을 구하시오.

6. 문제(3) 해설

출제 의도

등비수열과 등차수열 및 로그함수에 대한 이해력과, 수식으로 주어진 상황에 대한 문해력 그리고 이를 수식으로 완성하고 주어진 조건을 만족시키는 값을 도출하는 문제해결능력을 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정
관련 성취기준	

	과목명: 수학Ⅰ	관련
성취기준 1	수학Ⅰ - (1) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수 [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	
성취기준 2	수학Ⅰ - (3) 수열 - 1 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학Ⅰ	황선욱 외 8명	미래엔	2019	41, 123

문항 해설

등비수열과 등차수열의 차이를 정확히 이해하고, 부분합 조건으로부터 공차를 계산하여 요구되는 값을 정확히 구하는 문제이다.

채점 기준

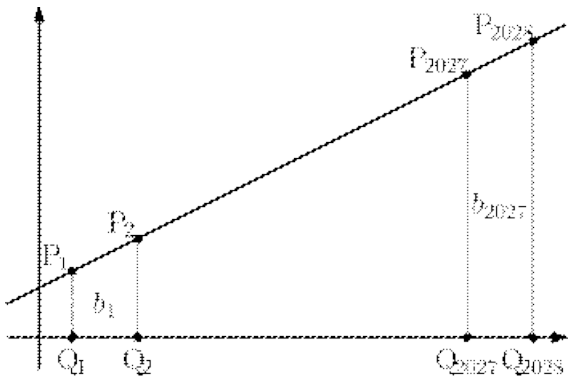
하위 문항	채점 기준	배점
(1)	주어진 조건으로부터 $f(a_n)$이 공차 $d=2\ln r$인 등차수열이라는 사실을 파악한다.	10
(2)	나머지 조건을 이용하여 등차수열의 공차 d를 구하고, 이로부터 실수 r을 정확히 구한다.	15

예시 답안

사각형 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$은 선분 $P_nQ_n=f(a_n)$과 선분 $P_{n+1}Q_{n+1}=f(a_{n+1})$를 윗변과 아랫변으로 하고, 선분 $Q_nQ_{n+1}=1$를 높이로 하는 사다리꼴이므로 b_n은 다음과 같다.

$$b_n=\frac{1}{2}(f(a_{n+1})+f(a_n))=\frac{1}{2}(2\ln a_1r^{n-1}+2\ln a_1r^n)=(2\ln a_1+(2n-1)\ln r)$$

따라서 b_n은 첫항이 $2\ln a_1+\ln r$이고 공차가 $2\ln r$인 등차수열이다.



또한, $f(2027)=19$로부터 다음 식을 얻는다.

$$2\ln a_1r^{2026}=2(\ln a_1+2026\ln r)=19,\quad 2\ln a_1=19-4052\ln r$$

위의 결과를 종합하면, 수열의 합은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{N}b_n=N(2\ln a_1-\ln r)+\frac{N(N+1)}{2}2\ln r=N(19-4053\ln r)+N(N+1)\ln r$$

문제의 조건 $\sum_{n=1}^{2027}b_n=20270$에서, $N=2027$이므로

$$\sum_{n=1}^{2027}b_n=2027(19-4053\ln r)+(2027\cdot 2028)\ln r=20270$$

가 성립하므로, 이를 정리하면 다음 결과를 얻는다.

$$\ln r = \frac{9}{2025}, \quad r = e^{\frac{1}{225}}$$

7. 문제(4) 및 제시문

문제 4 다음 제시문을 읽고 아래 논제에 답하시오. (25점)

함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c 를 포함하는 닫힌구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

【출처: 수학II「정적분」】

두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A와 사건 B 가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n 이면, 사건 A 또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$

【출처: 수학「경우의 수」】

양의 정수 a, b에 대하여 $\int_{-1}^{1} |ax+b|\,dx = 10$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

8. 문제(4) 해설

출제 의도

절댓값을 포함하는 일차함수의 정적분을 해결하는 계산능력과, 경우를 나누어 방정식을 만족시키는 양의 정수의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하는 사고력을 평가한다.

출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책 8] 수학과 교육과정		
관련 성취기준	**과목명: 수학**		**관련**
	성취기준 1	수학 - (5) 확률과 통계 - 1 경우의 수 [10수학05-01] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	
	과목명: 수학II		**관련**
	성취기준 2	수학II - (3) 적분 - 2 정적분 [12수학II03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.	

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	수학II	이준열 외 9명	천재교육	2018	124
	수학	김원경 외 14명	비상교육	2018	243

문항 해설

경우를 나누어 절댓값을 포함하는 일차함수의 정적분을 계산하고, 각각의 경우에 대해 방정식을 만족시키는 양의 정수의 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여 더한다.

채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$a \le b$인 경우 정적분을 계산하면, $b = 5$를 얻는다. 이 경우 a가 양의 정수이므로 (a, b)의 순서쌍은 $(1, 5)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(5, 5)$의 다섯 가지이다.	10
(2)	$a > b$인 경우 정적분을 계산하면, 방정식 $10 = \frac{b^2}{a} + a$을 얻는다. a, b가 양의 정수이므로 방정식을 만족시키는 (a, b)의 순서쌍을 구하면 $(8, 4)$, $(9, 3)$의 두 가지이다.	15

예시 답안

$f(x) = ax + b$라 할 때, $f(1) = a + b > 0$이다. 따라서 $f(-1) = -a + b$의 부호에 따라 경우를 나누어 적분을 계산한다.
먼저 $f(-1) = -a + b \ge 0$인 경우, 즉, $a \le b$인 경우, 구간 $[-1, 1]$에서 $f(x) \ge 0$이다. 이때

$$10 = \int_{-1}^{1} |ax + b|\, dx = \int_{-1}^{1} (ax + b)\, dx = 2b$$

따라서 $b = 5$이다. 조건 $a \le b$인 양의 정수의 순서쌍 (a, b)를 모두 구하면 $(1, 5)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(5, 5)$의 다섯 가지를 얻는다.

한편 $f(-1) = -a + b < 0$인 경우, 즉, $a > b$인 경우 $f(x) = ax + b$의 x절편 $-\frac{b}{a} (\in (-1, 0))$에서 $f(x)$의 부호가 바뀐다. 그러므로

$$\begin{aligned} 10 = \int_{-1}^{1} |ax + b|\, dx &= \int_{-1}^{-\frac{b}{a}} (-ax - b)\, dx + \int_{-\frac{b}{a}}^{1} (ax + b)\, dx \\ &= \left[-\frac{a}{2}x^2 - bx \right]_{-1}^{-\frac{b}{a}} + \left[\frac{a}{2}x^2 + bx \right]_{-\frac{b}{a}}^{1} = \frac{b^2}{a} + a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 10a - a^2 = a(10 - a)$$

따라서 $a \le 9$이고, $a(10 - a)$는 어떤 양의 정수의 제곱과 같아야 한다. 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 모두 구하면 $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(5, 5)$, $(8, 4)$, $(9, 3)$이다. 이 중에서 $a > b$인 경우는 $(8, 4)$, $(9, 3)$의 두 가지이다.
그러므로 전체 경우의 수는 $5 + 2 = 7$가지이다.