[숙명여자대학교 문항정보]

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사 □ 선다형고사	
전형명	2027학년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열(일반) / 문항 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 3-1, 3-2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학I, 수학II, 미적분
	핵심개념 및 용어	부등식, 적분, 수열, 급수, 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계
예상 소요 시간	90 분 / 전체 100 분	

2. 문항 및 제시문

<가>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

(1) $f(x) \geq 0$이면, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(2) $f(x) \leq g(x)$이면, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

<나>

$a>0$, $b>0$이면, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 부등식

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \leq \frac{3\pi^2}{8}$$

이 성립함을 증명하시오.

1-2. 부등식

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^6+x^3+1}dx \leq \frac{1}{3}$$

이 성립함을 증명하시오.

<다>

첫째항이 b $(b \neq 0)$, 공비가 r $(r \neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = \frac{b(1-r^n)}{1-r}$$

이고, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} br^{n-1}$은

$|r| < 1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{b}{1-r}$,

$|r| \geq 1$일 때 발산한다.

$T_n = b + 2br + 3br^2 + \cdots + nbr^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kbr^{k-1}$이라고 하면

$$T_n - rT_n = (1-r)T_n = b + br + br^2 + \cdots + br^{n-1} - nbr^n = S_n - nbr^n$$

이 되고 $T_n = \frac{S_n - nbr^n}{1-r}$이 된다. $|r| < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$임이 알려져 있으므로

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - nbr^n}{1-r} = \frac{b}{(1-r)^2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} nbr^{n-1}$은 수렴하고 그 합은 $\frac{b}{(1-r)^2}$이다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이고 $b_n = e^{a_n}$이다. 제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하기 위한 d의 값의 범위를 구하고, 이 급수의 합을 구하시오.

2-2. $e^a + e^d = 1$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} nb_{2n}$의 합을 a에 대한 식으로 나타내시오.

<라>

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프와 직선 $y = mx + n$의 교점의 x좌표는 방정식 $ax^2 + bx + c = mx + n$, 즉

$$ax^2 + (b-m)x + c - n = 0$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프와 직선 $y = mx + n$의 위치 관계는 위 이차방정식의 판별식

$$D = (b-m)^2 - 4a(c-n)$$

의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

1. $D > 0$이면 두 점에서 만난다.
2. $D = 0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)
3. $D < 0$이면 만나지 않는다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 양수 k에 대하여, 직선 $y=x+4+k$가 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & (x<0)\\ (x-2)^2+k & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 구하고, 그 이유를 설명하시오.

3-2. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & (x<0)\\ -(x-2)^2+k & (x\geq 0)\end{cases}$$

에 대하여 $f(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나는 직선이 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

3. 출제 의도

부등식, 적분, 수열, 급수, 이차함수의 그래프는 수학뿐만 아니라 자연과학과 사회과학 등 다양한 학문 분야에서 활용되는 필수적인 수학적 도구이다. 본 문제들은 고등학교 교육과정의 수학, 수학I, 수학II, 미적분 등에서 학습한 내용을 바탕으로 구성하였다. 이를 통해 학생들이 제시문을 정확하게 이해하고, 주어진 함수의 정적분의 크기 비교, 등차수열과 등비수열, 급수의 수렴, 이차함수와 직선의 위치 관계 등에 관한 문제를 논리적이고 체계적으로 해결하는 능력을 평가하고자 한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	교육부 고시 제2020-236호 [별책8] 수학과 교육과정
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
제시문<가>, <나>	[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. [12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
문항1-1, 문항1-2	[10수학03-08] 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학Ⅱ03-04] 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.
제시문<다>	[12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
문항2-1, 문항2-2	[12수학 I 03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학 I 03-03] 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다. [12수학 I 03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

	[12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다. [12미적01-06] 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
제시문<라>	[10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.
문항3-1, 문항3-2	[10수학01-07] 이차방정식에서 판별식의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다. [10수학01-08] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다. [10수학01-10] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해한다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	김원경	비상교육	2020	49-54, 59-62, 191-192
	고등학교 수학	이준열	천재교육	2020	52-58, 63-66, 209-212
	고등학교 수학I	김원경	비상교육	2020	119-133, 139-144
	고등학교 수학I	이준열	천재교육	2020	124-137, 142-145
	고등학교 수학II	김원경	비상교육	2020	78-85, 112-118, 125-131
	고등학교 수학II	이준열	천재교육	2020	83-90, 121-127, 132-139
	고등학교 미적분	고성은	좋은책 신사고	2020	11-21, 32-36, 155-159
	고등학교 미적분	김원경	비상교육	2020	11-22, 32-36, 147-149

5. 문항 해설

제시문 <가>에서는 두 함수의 크기 관계가 정적분의 크기 관계로 이어질 수 있음을 설명하고 있다. 제시문 <나>에서는 모든 양수에 대해 성립하는 절대부등식 중 하나인 산술평균과 기하평균의 관계를 설명하고 있다. 문항 1-1은 직접 정적분을 계산하기 어려운 함수가 주어졌을 때, 미분을 이용하여 그 함수와 크기 관계를 비교할 수 있는 정적분 가능한 함수를 찾아내고, 이를 적분하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다. 문항 1-2는 산술평균과 기하평균의 관계와 같은 절대부등식을 활용하여 정적분 가능한 함수를 설정하고, 그 함수의 정적분을 통해 부등식을 증명할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <다>에서는 급수의 합의 수렴 조건과 극한값을 소개하고 있다. 문항 2-1은 등차수열을 지수함수 값이 등비수열로 표시할 수 있으며 이에 대한 등비급수의 수렴 조건과 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다. 문항 2-2는 해당 등비수열의 짝수 항으로 이루어진 수열 또한 등비수열임을 이용하여 급수 합이 수렴하기 위한 조건을 만족하는지를 확인하고 극한값을 계산할 수 있는지를 평가한다.

제시문 <라>에서는 이차함수와 직선의 위치관계는 이차방정식의 판별식에 의하여 결정할 수 있음을 소개하고 있다. 문항 3-1은 이차함수를 이용하여 정의된 함수와 직선의 교점의 개수를 바르게 구할 수 있는지를 평가한다. 문항 3-2는 이차함수를 이용하여 정의된 함수와 최대로 만날 수 있는 직선이 존재하는 조건을 구할 수 있는지를 평가한다.

6. 채점 기준

■ 각 세부 문제별로 다음과 같은 기준을 만족시켜야 한다.

▶ 문제 <1-1>, <1-2>

① <1-1>에서 $\sin x \le x$임을 보인다.

② <1-1>에서 $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$ 인 부등식을 도출한다.

③ <1-1>에서 정적분의 크기 관계를 이용하여 부등식을 보인다.

④ <1-2>에서 절대부등식을 적용할 수 있는 유리함수로 바꾼다.

⑤ <1-2>에서 절대부등식을 이용하여 $\frac{1}{\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+1} \le \frac{1}{3}$ 인 부등식을 도출한다.

⑥ <1-2>에서 정적분의 크기 관계를 이용하여 부등식을 보인다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ②과 ⑤ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <2-1>, <2-2>

① <2-1>에서 $b_n = e^{a_n}$이 등비수열임을 보인다.

② <2-1>에서 급수가 수렴하는 공차 값의 범위를 구한다.

③ <2-1>에서 극한값을 구한다.

④ <2-2>에서 $\{b_{2n}\}$이 첫째항이 e^{a+d}, 공비가 e^{2d}인 등비수열임을 보인다.

⑤ <2-2>에서 급수의 합이 수렴하는 조건을 만족함을 보인다.

⑥ <2-2>에서 급수의 합을 구한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ③과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

▶ 문제 <3-1>, <3-2>

① <3-1>에서 함수 $f(x)$의 오른쪽 부분과 직선이 두 점에서 만남을 보인다.
② <3-1>에서 함수 $f(x)$의 왼쪽 부분과 직선이 한 점에서 만남을 보인다.
③ <3-2>에서 직선이 함수의 두 부분과 각각 두 점에서 만남을 설명한다.
④ <3-2>에서 함수 $f(x)$의 오른쪽 부분과 직선이 두 점에서 만날 조건을 서술한다.
⑤ <3-2>에서 함수 $f(x)$의 왼쪽 부분과 직선이 두 점에서 만날 조건을 서술한다.
⑥ <3-2>에서 조건들을 결합하여 k의 값의 범위를 바르게 구한다.

1등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족시키고 논리 전개가 완벽한 경우
2등급: 위의 6가지 기준을 모두 충족하나 논리 전개나 표현력이 다소 떨어지는 경우
3등급: 위의 6가지 기준 중 5가지 요건을 만족하는 경우
4등급: 위의 6가지 기준 중 ②과 ⑥ 요건을 충족시키고 나머지 요건 중 2가지를 만족시키는 경우
5등급: 위의 6가지 기준 중 4가지 요건을 만족하는 경우(4등급 기준 제외)
6등급: 위의 6가지 기준 중 3가지 요건을 만족하는 경우
7등급: 위의 6가지 기준 중 2가지 요건을 만족하는 경우
8등급: 위의 6가지 기준 중 1가지 요건을 만족하는 경우
9등급: 위의 6가지 기준을 전혀 충족시키지 못한 경우

7. 예시 답안

■ 1-1

$f(x)=x-\sin x$라 하면, $f(0)=0$이고 $f'(x)=1-\cos x \geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 값은 $x>0$에서 항상 양수이다. 즉,

$$\sin x \leq x,\ x \geq 0$$

이다. 따라서 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$에서 $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$이므로

$$x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{x^2}{x} = x$$

이다. 따라서 제시문 <가>에 의해

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,dx$$

이다. 그런데

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3\pi^2}{8}$$

이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \leq \frac{3\pi^2}{8}$$

이다.

■ 1-2

$1 \le x \le 2$일 때 $\dfrac{x^3}{x^6+x^3+1} = \dfrac{1}{\dfrac{x^6+x^3+1}{x^3}} = \dfrac{1}{x^3+\dfrac{1}{x^3}+1}$ 이므로 제시문 <나>에 의해

$$\frac{1}{\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)+1} \le \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

이다. 따라서 제시문 <가>에 의해

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^6+x^3+1}dx \le \int_1^2 \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}$$

이다.

■ 2-1

$b_n = e^{a_n} = e^{a+(n-1)d} = e^a\left(e^d\right)^{n-1}$이므로, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b = e^a$, 공비가 $r = e^d$인 등비수열이다. 제시문 <다>에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하기 위한 조건은 $e^d < 1$이다. 따라서 d의 값의 범위는 $d < 0$이다. 이때 이 급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b}{1-r} = \frac{e^a}{1-e^d}$$

■ 2-2

급수 $T = \sum_{n=1}^{\infty} nb_{2n}$이라고 하면 $b_{2n} = e^{a+d(2n-1)} = \left(e^{a+d}\right)\left(e^{2d}\right)^{n-1}$이므로 수열 $\{b_{2n}\}$은 첫째항이 e^{a+d}, 공비가 e^{2d}인 등비수열이다. 문항의 조건 $e^a + e^d = 1$에 의해 $0 < e^{2d} < 1$이므로, 제시문 <다>에 의해

$$T = \frac{e^{a+d}}{\left(1-e^{2d}\right)^2} = \frac{e^{a+d}}{\left((1+e^d)(1-e^d)\right)^2}$$

이다. $1-e^d = e^a$, $1+e^d = 2-e^a$이므로

$$T = \frac{1-e^a}{e^a(2-e^a)^2}$$

■ 3-1

양수 k에 대하여 직선

$$y = x + 4 + k$$

와 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같이 세 점에서 만난다. 곡선 $y = (x+2)^2$와 직선 $y = x+4+k$의 교점의 x좌표는 방정식

$$(x+2)^2 = x + 4 + k$$

의 근이다. 이 방정식은 $x^2 + 3x - k = 0$이고, 판별식은 $9 + 4k > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다. 이때, 두 근의 곱이 $-k < 0$이므로 이 직선은 $f(x)$의 그래프의 $x < 0$인 부분과 한 점에서 만난다.

또한 곡선 $y = (x-2)^2 + k$와 직선 $y = x+4+k$의 교점의 x좌표는 방정식

$$(x-2)^2 + k = x + 4 + k,$$

즉 $x^2 - 5x = 0$의 근 $x = 0$, 5이다. 따라서 직선 $y = x+4+k$는 $f(x)$의 그래프의 $x \ge 0$인 부분과 두 점에서 만난다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y = x+4+k$는 서로 다른 세 점에서만 만난다.

■ 3-2

함수 $f(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나는 직선이 $y=mx+n$이라고 하면, 이 직선은 함수 $f(x)$의 그래프의 왼쪽 부분($x<0$), 오른쪽 부분($x\geq 0$)과 각각 두 점에서 만나야 한다. 즉, 방정식 $(x+2)^2=mx+n$이 서로 다른 두 음의 실근을 가져야 하며, 동시에 방정식 $-(x-2)^2+k=mx+n$은 서로 다른 두 음이 아닌 실근을 가져야 한다.

방정식 $(x+2)^2=mx+n$은 $x^2-(m-4)x+4-n=0$이고 서로 다른 두 음의 실근을 갖기 위해서는 판별식이 0보다 크고, 두 근의 합이 음수, 두 근의 곱이 양수이어야 한다. 따라서 조건

$(m-4)^2-4(4-n)>0$ ……①

$m-4<0$ ……②

$4-n>0$ ……③

을 만족시켜야 한다.

한편, 방정식 $-(x-2)^2+k=mx+n$은 $x^2+(m-4)x+n+4-k=0$이고 서로 다른 두 음이 아닌 실근을 갖기 위해서는 판별식이 0보다 크고, 두 근의 합이 양수, 두 근의 곱이 0 이상이어야 한다. 따라서 조건

$(m-4)^2-4(n+4-k)>0$……④

$m-4<0$ ……⑤

$n+4-k\geq 0$ ……⑥

을 만족시켜야 한다. 그러므로

$k-4\leq n<4$ ……⑦ (③과 ⑥에서)

$-\frac{1}{4}(m-4)^2+4<n<\frac{1}{4}(m-4)^2+k-4$ ……⑧ (①과 ④에서)

$m<4$ ……⑨ (②와 ⑤에서)

를 만족시키는 m과 n이 존재하여야 한다. ⑦을 만족시키는 n이 존재하려면 $k<8$이어야 한다. 이때 ⑧을 만족시키는 n이 존재하기 위해서는

$$-\frac{1}{4}(m-4)^2+4<\frac{1}{4}(m-4)^2+k-4$$

이기 때문에

$$k>8-\frac{1}{2}(m-4)^2$$

이다. 따라서 ⑨에 의해 $m<4-\sqrt{2(8-k)}$를 만족시키는 m은 존재한다. 이 m에 대해

$-\frac{1}{4}(m-4)^2+4<4$이고, $k-4<\frac{1}{4}(m-4)^2+k-4$

이므로 ⑦과 ⑧을 만족시키는 n이 존재한다. 따라서 답은 $k<8$이다.