계 열 문 항

<가>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때,

(1) $f(x) \geq 0$이면, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(2) $f(x) \leq g(x)$이면, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

<나>

$a>0$, $b>0$이면, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

1-1. 부등식

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \leq \frac{3\pi^2}{8}$$

이 성립함을 증명하시오.

1-2. 부등식

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^6+x^3+1}dx \leq \frac{1}{3}$$

이 성립함을 증명하시오.

계 열 문 항

<다>

첫째항이 b $(b \neq 0)$, 공비가 r $(r \neq 1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n = \frac{b(1-r^n)}{1-r}$$

이고, 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} br^{n-1}$은

$|r| < 1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{b}{1-r}$,

$|r| \geq 1$일 때 발산한다.

$T_n = b + 2br + 3br^2 + \cdots + nbr^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kbr^{k-1}$이라고 하면

$$T_n - rT_n = (1-r)T_n = b + br + br^2 + \cdots + br^{n-1} - nbr^n = S_n - nbr^n$$

이 되고 $T_n = \frac{S_n - nbr^n}{1-r}$이 된다. $|r| < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$임이 알려져 있으므로

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - nbr^n}{1-r} = \frac{b}{(1-r)^2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} nbr^{n-1}$은 수렴하고 그 합은 $\frac{b}{(1-r)^2}$이다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이고 $b_n = e^{a_n}$이다. 제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

2-1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하기 위한 d의 값의 범위를 구하고, 이 급수의 합을 구하시오.

2-2. $e^a + e^d = 1$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} nb_{2n}$의 합을 a에 대한 식으로 나타내시오.

계 열 문 항

<라>

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉

$$ax^2+(b-m)x+c-n=0$$

의 실근과 같다. 따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 위 이차방정식의 판별식

$$D=(b-m)^2-4a(c-n)$$

의 값의 부호에 따라 다음과 같다.

1. $D>0$이면 두 점에서 만난다.
2. $D=0$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)
3. $D<0$이면 만나지 않는다.

제시문을 읽고 다음 문제에 답하시오.

3-1. 양수 k에 대하여, 직선 $y=x+4+k$가 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & (x<0)\\ (x-2)^2+k & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 구하고, 그 이유를 설명하시오.

3-2. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & (x<0)\\ -(x-2)^2+k & (x\geq 0)\end{cases}$$

에 대하여 $f(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점에서 만나는 직선이 존재하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.