2027학년도 서강대학교

모의논술 자료집

- 자연계열 -

서강대학교 입학처

목 차

☐ 문제 및 제시문 1

☐ 출제의도 및 채점기준 3

■ **유의사항**
1. 시험시간은 50분입니다.

문제

【1-1】 두 곡선 $y=x-\sqrt{x}$, $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)$ 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

【1-2】 두 정수 a, b에 대하여, 곡선 $y=x-\sqrt{x}$ $(1\le x\le 100)$과 두 직선 $y=0$, $x=100$으로 둘러싸인 도형에 포함되는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. (단, 도형은 둘레를 포함한다.)

【1-3】 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$는 $x=-3$과 $x=0$에서 변곡점을 갖는다.
> (나) 함수 $g(x)=|f(x)|$는 $x=m$에서만 미분가능하지 않다. (단, m은 0보다 큰 상수)

상수 m의 값을 구하시오.

【1-4】 문항 【1-3】에서 구한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx+f(0)$의 교점의 개수를 실수 k의 값에 따라 조사하시오.

제시문

[가] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

[나] 곡선 $y=f(x)$위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 변하거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 변할 때, 점 P를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 한다.

▢ 출제의도 및 채점기준

1. 출제의도

· 주어진 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있고, 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가한다.
· 주어진 조건을 만족하는 순서쌍의 개수를 Σ를 이용하여 나타내고 이를 계산할 수 있는지를 평가한다.
· 주어진 조건을 바탕으로 사차함수의 그래프 개형을 파악하고, 이를 이용하여 해당 조건을 만족하는 함수와 상수 m을 구할 수 있는지를 평가한다.
· 사차함수의 그래프로 주어진 곡선과 그 위의 한 점을 지나는 직선과의 교점의 개수를 도함수를 활용하여 구할 수 있는지를 평가한다.

2. 문항해설

■ 제시문 [가]는 2015년 개정 교육과정 '[미적분] - (3) 적분법 - ② 정적분의 활용', 제시문 [나]는 2015년 개정 교육과정 '[미적분] - (2) 미분법 - ③ 도함수의 활용'에 관련된 내용으로, 교과서 원문 그대로 발췌하여 사용하였다. 검정교과서에서 공통으로 다루고 있는 정의와 설명이 제시되어 있으며, 학생들이 문제를 푸는 데 도움을 받을 수 있는 제시문들로 구성되어 있다.

■ 문항 【1-1】은 삼각함수의 주기 및 치역을 이용하여 그래프를 그릴 수 있는지, 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있는지, 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 삼각함수의 그래프, 함수의 그래프에 대한 도함수의 활용, 도형의 넓이에 대한 정적분의 활용은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

■ 문항 【1-2】는 주어진 조건을 만족하는 순서쌍의 개수를 Σ를 이용하여 나타낼 수 있는지, Σ의 성질을 이해하여 이를 활용할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 수열의 합과 Σ의 활용은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

■ 문항 【1-3】은 이계도함수와 변곡점의 관계를 이해하는지, 도함수를 활용하여 주어진 조건을 만족하는 사차함수의 그래프 개형을 찾을 수 있는지, 이를 이용하여 해당 조건을 만족하는 사차함수와 상수 m을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 도함수의 활용은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

■ 문항 【1-4】는 사차함수의 그래프로 주어진 곡선과 그 위의 한 점을 지나는 직선과의 교점의

개수를 도함수를 활용하여 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 도함수를 활용하여 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 찾는 방법은 모든 검정교과서에서 공통으로 다루고 있으므로, 교육과정을 충실히 이수한 학생은 충분히 해결할 것으로 판단된다.

3. 채점기준

【1-1】
· 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
· 삼각함수의 그래프를 그릴 수 있다.
· 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

【1-2】
· 주어진 조건을 만족하는 순서쌍의 개수를 Σ를 이용하여 나타낼 수 있다.
· 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$을 계산할 수 있다.

【1-3】
· 이계도함수와 변곡점의 관계를 이해한다.
· 도함수를 활용하여 주어진 조건을 만족하는 사차함수의 그래프 개형을 찾을 수 있다.
· 해당 조건을 만족하는 사차함수와 상수 m을 구할 수 있다.

【1-4】
· 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
· 이를 활용하여 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.

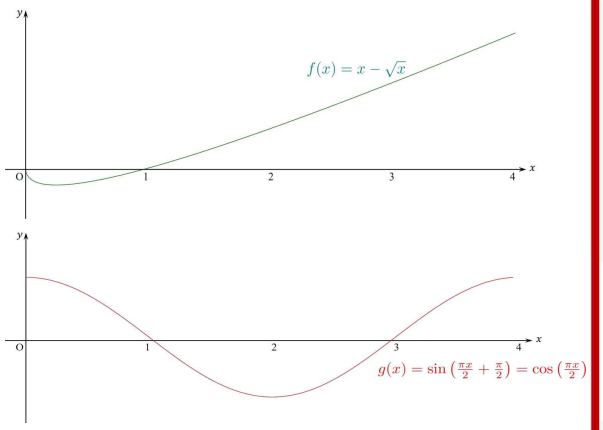
4. 예시답안

【1-1】 $f(x)=x-\sqrt{x}$라고 하면 $f(0)=f(1)=0$이다.

$f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 해는 $x=\dfrac{1}{4}$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프로 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗

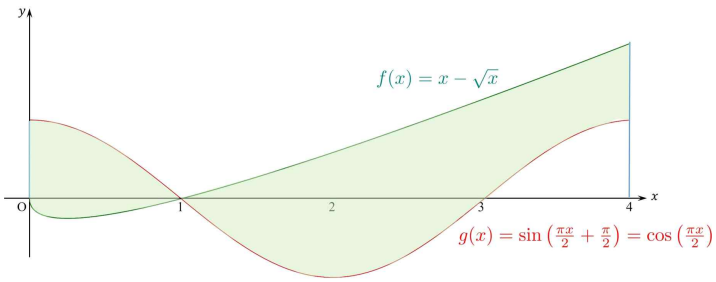


$g(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$라고 하면

$g(x)$의 주기는 4이고, 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이다.

제시문 [가]에 의하여, 구하는 넓이는 $\displaystyle\int_0^4 |f(x)-g(x)|\,dx$이다.

위의 그래프로부터, 닫힌구간 $[0,1]$에서는 $f(x)\le g(x)$이고, 닫힌구간 $[1,3]$에서는 $f(x)\ge g(x)$임을 알 수 있다. 또한, 닫힌구간 $[3,4]$에서는 $f(x)$가 증가하므로 $f(x)\ge f(3)=3-\sqrt{3}>1\ge g(x)$이다.



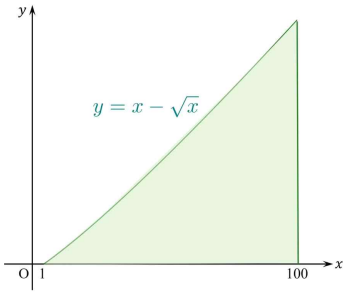
따라서 구하는 넓이 S는

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\{g(x)-f(x)\}dx+\int_1^4\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int_0^1\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-x+\sqrt{x}\right\}dx+\int_1^4\left\{x-\sqrt{x}-\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right\}dx\\&=\left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^4\\&=\frac{4}{\pi}+3\end{aligned}$$

【1-2】 구하는 순서쌍 (a,b)의 개수는 100이하의 자연수 a에 대하여 $0\le b\le a-\sqrt{a}$를 만족하는 정수 b의 개수를 모두 구해서 더한 것과 같다.

(a) $a=1$인 경우: $b=0$만 가능하므로 순서쌍 (a,b)의 개수는 1개다.

(b) $n=1, 2, \cdots, 9$에 대하여, a가 $n^2 < a \le (n+1)^2$인 정수인 경우:
$n < \sqrt{a} \le n+1$이므로 $a-n-1 \le a-\sqrt{a} < a-n$이다. 따라서
$b=0, 1, \cdots, a-n-1$이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(a-n)$개이다.



그러므로 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$
\begin{aligned}
&1+\sum_{k=1^2+1}^{2^2}(k-1)+\sum_{k=2^2+1}^{3^2}(k-2)+\cdots+\sum_{k=9^2+1}^{10^2}(k-9)\\
&=\sum_{k=1}^{100}k-\{(2^2-1^2)+2\times(3^2-2^2)+\cdots+9\times(10^2-9^2)\}\\
&=\frac{100\times101}{2}-\sum_{n=1}^{9}n\{(n+1)^2-n^2\}\\
&=5050-\sum_{n=1}^{9}(2n^2+n)\\
&=5050-2\times\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}\\
&=4435
\end{aligned}
$$

【1-3】 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라고 하면,

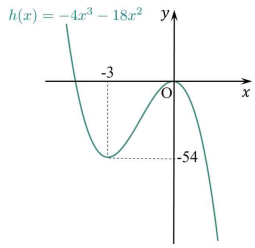
$$
\begin{aligned}
f'(x)&=4x^3+3ax^2+2bx+c\\
f''(x)&=12x^2+6ax+2b
\end{aligned}
$$

조건 (가)에 의해 $f''(x)=12x(x+3)$이므로 $a=6$, $b=0$이므로 $f(x)=x^4+6x^3+cx+d$이다.
한편, $g(x_0)=0$일 때 함수 $g(x)$가 $x=x_0$에서 미분가능할 필요충분조건은 $f'(x_0)=0$이다.
따라서 조건 (나)는 다음 조건 ㉠과 필요충분조건이다.

> $f(m)=0$, $f'(m)\neq0$을 만족하는 실수 m은 오직 하나 존재하고, 이때 $m>0$이다. ····· ㉠

이제 방정식 $f'(x)=0$, 즉 $-4x^3-18x^2=c$의 서로 다른 실근의 개수에 따라 경우를 나누어서 생각하자. $h(x)=-4x^3-18x^2$이라고 하면
$h'(x)=-12x^2-36x=-12x(x+3)$이므로 방정식 $h'(x)=0$의 해는 $x=0$, $x=-3$이다. 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프로 그리면 다음과 같다.

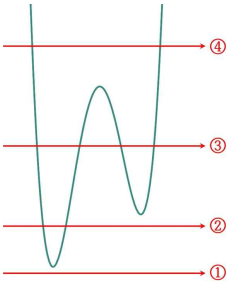
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	-54	↗	0	↘



(a) $-54<c<0$인 경우: 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근 $\alpha<\beta<\gamma$를 가지므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극소이고 $x=\beta$에서 극대이다. $f(\alpha)$와 $f(\gamma)$의 최솟값을 p, $f(\alpha)$와 $f(\gamma)$의 최댓값을 q라고 하면, 다음 4가지 경우가 가능하다.
① $p\ge0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq0$을 만족하는 실수 m의 개수는 0개
② $p<0\le q$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq0$을 만족하는 실수 m의 개수는 2개
③ $q<0<f(\beta)$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq0$을 만족하는 실수 m의 개수는 4개

④ $f(\beta) \le 0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 2개

어느 경우에도 조건 ㉠을 만족하지 않는다.



(b) $c=-54$인 경우: $f'(x)=4x^3+18x^2-54=2(x+3)^2(2x-3)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극소를 갖는다.

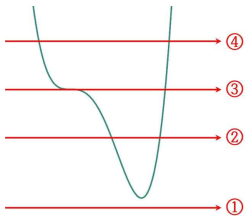
① $f\left(\frac{3}{2}\right)\ge 0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 0개

② $f\left(\frac{3}{2}\right)<0<f(-3)$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 2개

③ $f(-3)=0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 1개이고, 이때 $m>0$이다.

④ $f(-3)<0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 2개

③인 경우에만 조건 ㉠을 만족한다.



(c) $c=0$인 경우: $f'(x)=4x^3+18x^2=2x^2(2x+9)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{9}{2}$에서 극소를 갖는다.

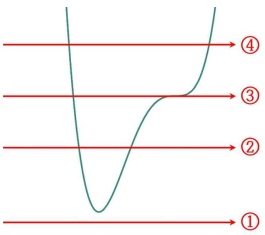
① $f\left(-\frac{9}{2}\right)\ge 0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 0개

② $f\left(-\frac{9}{2}\right)<0<f(0)$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 2개

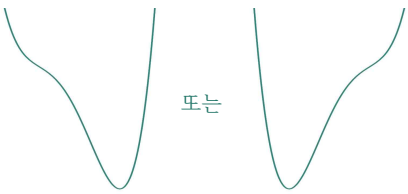
③ $f(0)=0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 1개이고, 이때 $m<0$이다.

④ $f(0)<0$: $f(m)=0$, $f'(m)\neq 0$을 만족하는 실수 m의 개수는 2개

어느 경우에도 조건 ㉠을 만족하지 않는다.



(d) $c<-54$ 또는 $c>0$인 경우: 방정식 $f'(x)=0$이 오직 하나의 실근 α를 갖는다. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이므로, 이 경우는 조건 ㉠을 만족하지 않는다.



따라서 (b)의 ③인 경우에만 조건 ㉠을 만족하며, 이 경우, $f(-3)=0$이므로 $d=-81$이다.

그러므로 $f(x)=x^4+6x^3-54x-81=(x+3)^3(x-3)$이고 $m=3$이다.

【1-4】 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx+f(0)$의 교점의 개수는 방정식

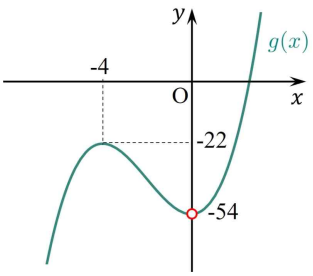
$$x^4+6x^3-54x=kx$$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이 방정식은 $x=0$을 실근으로 갖는다. 이제 0이 아닌 실근을 찾기 위해 방정식

$$x^3+6x^2-54=k$$

의 0이 아닌 서로 다른 실근의 개수를 조사하자. $g(x)=x^3+6x^2-54$이라고 하면

$g'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$이므로 방정식 $g'(x)=0$의 해는 $x=0$, $x=-4$이다. 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프로 그리면 다음과 같다.



x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	-22	↘	-54	↗

그러므로 0이 아닌 서로 다른 실근의 개수는 $k\le-54$이거나 $k>-22$이면 1개, $-54<k<-22$이면 3개, $k=-22$이면 2개이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx+f(0)$의 교점의 개수는

(i) $k\le-54$이거나 $k>-22$이면 2개

(ii) $-54<k<-22$이면 4개

(iii) $k=-22$이면 3개