2027학년도 모의논술

논술문제 해설지
수리형



논술문제 해설지 (수리형)

[문제 1]

■ 개요 및 주요 평가항목

이 문제는, 좌표평면에 주어진 서로 다른 직선들의 교점으로부터 생각할 수 있는 삼각형, 특히 정삼각형의 개수를 구하는 문제로 '경우의 수' 에서 곱의 법칙을 제대로 활용할 수 있는지를 평가하고자 한다. 그 과정에서 '자연수의 거듭제곱의 합' 와 '로그함수' 등에 대한 이해를 묻는다.

[문제 1 – i]

'경우의 수' 에서 곱의 법칙과 '자연수의 거듭제곱의 합' 을 올바르게 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 1 – ii]

'경우의 수' 에서 곱의 법칙과 '자연수의 거듭제곱의 합' 을 올바르게 이해하고 있는지 평가한다.

[문제 1 – iii]

'로그함수' 와 '이차부등식' 을 올바르게 이해하고 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (수리형)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 1 – i]

○ 예시답안

편의상 직선 ℓ을 x축이라 가정할 때, 정삼각형의 개수가 최대가 되기 위해서는 n개의 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 혹은 120°를 이루어야 한다. 즉, 직선의 기울기가 $\sqrt{3}$ 혹은 $-\sqrt{3}$이어야 한다. 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선의 개수를 k라 할 때, 기울기가 $-\sqrt{3}$인 직선의 개수는 $n-k$이다. 이때, 만들어지는 크고 작은 정삼각형의 개수는 $k(n-k)$이고 이 값은 $|k-(n-k)|$이 최소일 때 얻어진다. 따라서, 자연수 m에 대해

$$a_n = \begin{cases} m^2 & (n=2m\text{일 때, } m \geq 2) \\ m(m+1) & (n=2m+1\text{일 때, } m \geq 1) \end{cases}$$

이다. 이로부터

$$\sum_{n=3}^{50} a_n = \sum_{m=2}^{25} (a_{2m-1} + a_{2m}) = \sum_{m=2}^{25} \{m(m-1)+m^2\} = \sum_{m=2}^{25} (2m^2 - m) = 10724$$

이다.

○ 채점기준

(5점) a_n을 올바르게 구할 수 있다.

(5점) $\sum_{n=3}^{50} a_n$의 값을 올바르게 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 1 – ii]

○ 예시답안

[문제 1 – i]에서와 같은 방법으로 직선 ℓ을 x축이라 가정할 때, 정삼각형의 개수가 다음으로 최대가 되기 위해서는 다음의 두가지 경우 중 하나가 성립해야 한다.

(a) n개 직선의 기울기가 $\sqrt{3}$ 혹은 $-\sqrt{3}$ 이다.

(b) n개의 직선 중 오직 $n-1$개 직선만의 기울기가 $\sqrt{3}$ 혹은 $-\sqrt{3}$ 이다.

우선 $n=2m\,(m\geq 2)$이 짝수라고 가정하자. (a)의 경우, 정삼각형의 개수가 두 번째로 최대가 되는 방법은, 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 수와 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 수의 차이가 두 번째로 최소인 2인 경우이고, 이때 정삼각형의 개수는 $(m+1)(m-1)=m^2-1$ 이다. (b)의 경우, 정삼각형의 개수는 $a_{n-1}=a_{2m-1}=m(m-1)$이다. 따라서, $b_{2m}=m^2-1$이다.

이제, $n=2m+1\,(m\geq 1)$이 홀수라고 가정하자. $m=1$인 경우, $b_3=1$이다. 따라서, $m\geq 2$이라고 가정하자. (a)의 경우, 정삼각형의 개수가 두 번째로 최대가 되는 방법은, 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 수와 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 수의 차이가 두 번째로 최소인 3인 경우이고, 이때 정삼각형의 개수는 $(m+2)(m-1)=m^2+m-2$이다. (b)의 경우, 정삼각형의 개수는 $a_{n-1}=m^2$ 이다. 따라서, $b_{2m+1}=\begin{cases} m^2+m-2 & (m\geq 2) \\ 1 & (m=1) \end{cases}$ 이다. 이를 정리하면,

$$\sum_{n=3}^{50} b_n = b_3 + \sum_{m=2}^{24}\left(b_{2m}+b_{2m+1}\right)+b_{50} = 25^2 + \sum_{m=2}^{24}\left(2m^2+m-3\right)= 10653$$

이다.

○ 채점기준

(5점) b_n을 올바르게 구할 수 있다.

(5점) $\sum_{n=3}^{50} b_n$의 값을 올바르게 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 1 – iii]

○ 예시답안

주어진 부등식을 정리하면 $\frac{a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_N}{b_3 \cdot b_4 \cdot \cdots \cdot b_N} \le 9$이다.

먼저 $N=2m\ (m \ge 2)$이 짝수라고 가정하면,

$$\frac{a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_N}{b_3 \cdot b_4 \cdot \cdots \cdot b_N} = \left(\frac{a_4 \cdot a_6 \cdot \cdots \cdot a_{2m}}{b_4 \cdot b_6 \cdot \cdots \cdot b_{2m}}\right) \times \left(\frac{a_3 \cdot a_5 \cdot \cdots \cdot a_{2m-1}}{b_3 \cdot b_5 \cdot \cdots \cdot b_{2m-1}}\right)$$
$$= \frac{2m}{m+1} \times \frac{6(m-1)}{m+1} = \frac{12m(m-1)}{(m+1)^2}$$

이고, $\frac{12m(m-1)}{(m+1)^2} \le 9$로부터 $m^2 - 10m - 3 \le 0$임을 알 수 있다. 따라서, $m = 2, 3, \cdots, 10$으로 9개의 짝수가 가능하다.

이제 $N=2m+1\ (m \ge 1)$이 홀수라고 가정하면,

$$\frac{a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_{2m+1}}{b_3 \cdot b_4 \cdot \cdots \cdot b_{2m+1}} = \left(\frac{2m}{m+1}\right) \times \left(\frac{6m}{m+2}\right) = \frac{12m^2}{(m+1)(m+2)}$$

이고, $\frac{12m^2}{(m+1)(m+2)} \le 9$로부터 $m^2 - 9m - 6 \le 0$임을 알 수 있다. 따라서, $m = 1, 2, \cdots, 9$으로 9개의 홀수가 가능하다.

이를 종합하면, 모두 18개의 자연수가 가능하다.

○ 채점기준

(5점) 가능한 짝수 N의 개수를 올바르게 구할 수 있다.

(5점) 가능한 홀수 N의 개수를 올바르게 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 2]

■ 개요 및 주요 평가항목

이 문제는 주기 1인 조각별 이차함수의 그래프 위에서 접선의 방정식을 세우고, 그 접선이 고정된 직선 AB와 만나는 점 D를 해석하는 능력을 평가한다.

[문제 2 – i] 직선 AB의 방정식을 구하고, 접선의 기울기 범위를 이용하여 점 D의 존재와 유일성을 설명할 수 있는지 평가한다.

[문제 2 – ii] 점 D가 AB를 2:1로 외분한다는 조건을 외분점의 좌표와 접선 조건으로 바꾸고, 각 주기를 반으로 나눈 구간마다 해의 개수를 셀 수 있는지 평가한다.

[문제 2 – iii] 점 D가 나타내는 도형을 선분으로 표현하고, 선분의 길이를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 2 – iv] 선분 CD가 만드는 도형의 포함관계를 찾고, 도형의 넓이를 적분으로 계산할 수 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (수리형)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 2-ⅰ]

○ 예시답안

점 A의 좌표는 $(0,-1)$이고 점 B의 좌표는 $(3,-5)$이므로 직선 AB의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다. 따라서 직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x-1$이다. <제시문3>에 의해, 곡선 $y=F(x)$의 접선의 기울기는 항상 -1 이상 1 이하이다. 즉 모든 점 C에서 접선의 기울기 m은 $-1 \le m \le 1$을 만족한다.

그런데 직선 AB의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이므로, 접선과 직선 AB는 서로 평행할 수 없다.

따라서 임의의 점 C에서 그은 접선은 직선 AB와 정확히 한 점에서 만나며, 점 D는 항상 유일하게 존재한다. 이제 점 C의 좌표를 $(n,0)$(n은 정수)라고 하자. $F(n)=0$이고 $F'(n)=1$ 이므로, C에서의 접선의 방정식은 $y=x-n$이다. 이것과 직선 AB의 방정식을 연립하면

$x=\frac{3(n-1)}{7}$이므로 D의 x좌표는 $\frac{3(n-1)}{7}$이다. 다시 $y=x-n$에 대입하면 D의 y좌표는 $y=-\frac{4n+3}{7}$이다. 따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3(n-1)}{7},-\frac{4n+3}{7}\right)$이다.

○ 채점기준

(3점) 직선 AB의 방정식을 올바르게 구할 수 있다.

(3점) 접선의 기울기 범위를 이용하여 점 D의 유일성을 설명할 수 있다.

(4점) 점 C의 좌표가 $(n,0)$일 때 점 D의 좌표를 정확히 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 2 – ii]

○ 예시답안

점 D가 선분 AB를 2:1로 외분한다는 것은 $\overline{AD}:\overline{DB}=2:1$이고 D가 B쪽 바깥에 있다는 뜻이다. 따라서 외분점의 좌표는 $(6,-9)$이다. 이제 점 C의 x좌표를 $c=n+u$ (n은 정수, $0 \le u<1$)라 두고, $0 \le c \le 2027$인 경우만 따져 보자.

① $0 \le u \le \frac{1}{2}$인 경우:

이때 점 C의 좌표는 $(n+u,-2u^2+u)$, 접선의 기울기는 $1-4u$이다. 접선이 D$(6,-9)$를 지나야 하므로 $-9=(1-4u)(6-n-u)+(-2u^2+u)$, 즉, $2u^2+(4n-24)u-n+15=0$을 얻는다. $g_1(u)=2u^2+(4n-24)u-n+15$라 하면, $g_1'(u)=4(u+n-6)$이다. $0 \le n \le 5$일 때 g_1은 열린구간 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$에서 감소하고, $n \ge 6$일 때 열린구간 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$에서 증가한다.

$g_1(0)=15-n$이고 $g_1\left(\frac{1}{2}\right)=n+\frac{7}{2}$이다. 따라서 $0 \le n \le 14$에서는 두 끝값이 모두 양수이므로 해가 없다. $n=15$에서는 $u=0$이 유일한 해가 되고, $n=16,17,\cdots,2026$에서는 $g_1(0)<0<g_1\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 <제시문4>에 의해서 해가 정확히 하나 존재한다. 또한 $c=2027$인 경우는 $n=2027$, $u=0$인 경우이고 $g_1(0)<0$이므로 해가 되지 않는다.

② $\frac{1}{2} \le u<1$ 인 경우:

이때 점 C의 좌표는 $(n+u,2u^2-3u+1)$, 접선의 기울기는 $4u-3$이다. 같은 방식으로 $-9=(2u^2-3u+1)+(4u-3)(6-n-u)$, 즉, $2u^2+(4n-24)u-3n+8=0$을 얻는다. $g_2(u)=2u^2+(4n-24)u-3n+8$이라 하면 $g_2'(u)=4(u+n-6)$이다. $0 \le n \le 5$일 때 g_2는 열린구간 $\left(\frac{1}{2},1\right)$에서 감소하고, $n \ge 6$일 때 열린구간 $\left(\frac{1}{2},1\right)$에서 증가한다.

$g_2\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(n+\frac{7}{2}\right)$이고 $g_2(1)=n-14$이다. 따라서 $0 \le n \le 13$에서는 해가 없고, $n=14$에서는 $u=1$이 되어 구간에서 제외된다. $n=15,16,\cdots,2026$에서는 $g_2\left(\frac{1}{2}\right)<0<g_2(1)$이므로 <제시문4>에 의해서 해가 정확히 하나 존재한다.

결국 각 정수 $n=15,16,\cdots,2026$에 대하여 구간 $\left[n,n+\frac{1}{2}\right]$에서 1개, 구간 $\left[n+\frac{1}{2},n+1\right)$에서 1개의 점 C가 존재한다. 따라서 가능한 점 C의 개수는 $2\times(2026-15+1)=4024$개다.

논술문제 해설지 (수리형)

* 본 풀이에서는 방정식을 세워 해의 존재를 판정하였다. 한편, 접선의 기울기가 항상 -1 이상 1 이하임을 이용하여 해의 존재를 직관적으로 판단하는 방법도 가능하다. 점 D를 지나고 기울기가 1인 직선은 점 $(15,0)$을 지나고, 기울기가 -1인 직선은 점 $(-3,0)$을 지나기 때문에 점 C의 x좌표가 0이상 15미만인 경우에는 접선이 점 D를 지나지 않음을 알 수 있다. 그리고 그림을 그려보면 각 주기마다 가능한 점 C가 두 개씩 존재함을 알 수 있다.

○ 채점기준

(3점) 외분 조건으로부터 $D(6,-9)$를 정확히 구할 수 있다.

(4점) 각 주기를 반으로 나눈 두 구간에서 얻는 방정식을 세우고, 주어진 구간에서 함수의 증가·감소와 끝값을 이용하여 해의 존재 여부를 판정할 수 있다.

(3점) 전체 개수를 정확히 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 2 –iii]

점 C가 한 주기 $n \le x \le n+1$ (n은 정수)에서 움직일 때, 먼저 세 특수한 위치에 대응하는 점 D를 다음과 같이 잡자. $x=n$에서의 점 D를 P_n, $x=n+\frac{1}{2}$에서의 점 D를 M_n, $x=n+1$에서의 점 D를 Q_n이라고 하자. $x=n$, $x=n+\frac{1}{2}$, $x=n+1$에서의 접선은 각각 $y=x-n$, $y=-x+n+\frac{1}{2}$, $y=x-n-1$이므로, 이들을 직선 AB와 연립하면 $P_n\left(\frac{3(n-1)}{7},-\frac{4n+3}{7}\right)$, $M_n\left(-3n-\frac{9}{2},4n+5\right)$, $Q_n\left(\frac{3n}{7},-\frac{4n+7}{7}\right)$을 얻는다. 이제 점 D의 움직임을 각 주기를 반으로 나눈 두 구간별로 살펴보자. 편의상 점 P의 x좌표를 $\alpha(P)$라 하자.

① $n \le x \le n+\frac{1}{2}$: $\alpha(C)=n+u$ $\left(0 \le u \le \frac{1}{2}\right)$라 두면 $\alpha(D)=\frac{3(4nu-n+2u^2+1)}{12u-7}$이다. $\alpha(M_n)=-3n-\frac{9}{2}$, $\alpha(Q_n)=\frac{3n}{7}$임을 이용하면, $\alpha(D)-\alpha(M_n)=\frac{3(1-2u)(16n+2u+19)}{2(7-12u)} \ge 0$이고, $\alpha(Q_n)-\alpha(D)=\frac{3(14u^2+16nu+7)}{7(7-12u)} \ge 0$이다. 따라서 $0 \le u \le \frac{1}{2}$에서 얻는 모든 점 D는 선분 M_nQ_n 위에 있다.

② $n+\frac{1}{2} \le x \le n+1$: $\alpha(C)=n+u$ $\left(\frac{1}{2} \le u \le 1\right)$이라 두면 $\alpha(D)=\frac{3(4nu-3n+2u^2-2)}{12u-5}$이다. $\alpha(D)-\alpha(M_n)=\frac{3(2u-1)(16n+2u+19)}{2(12u-5)} \ge 0$이고 $\alpha(Q_n)-\alpha(D)=\frac{6(1-u)(8n+7u+7)}{7(12u-5)} \ge 0$이므로 항상 점 D는 선분 M_nQ_n 위에 있다. 한편 $u=\frac{1}{2}$일 때 $\alpha(D)=\alpha(M_n)$, $u=1$일 때 $\alpha(D)=\alpha(Q_n)$이다. 또 고정된 n에 대해, $\alpha(D)$를 나타내는 함수를 변수 u에 관한 함수로 보면, 이 함수는 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2},1\right]$에서 연속이므로, $n+\frac{1}{2} \le x \le n+1$일 때, 점 D가 나타내는 도형은 선분 M_nQ_n 전체이다. $n \le x \le n+\frac{1}{2}$일 때 점 D가 나타내는 도형 또한 모두 이 선분 위에 있으므로, 한 주기에서 점 D가 나타내는 도형은 바로 선분 M_nQ_n 이다. 또한 n이 1만큼 증가할 때, $\alpha(M_{n+1})=\alpha(M_n)-3$, $\alpha(Q_{n+1})=\alpha(Q_n)+\frac{3}{7}$이므로, 선분 M_nQ_n은 다음 주기의 선분 $M_{n+1}Q_{n+1}$ 안에 완전히 포함된다.

논술문제 해설지 (수리형)

따라서 $0 \le x \le 2027$에서 점 D가 나타내는 도형은 마지막 주기에서 얻는 선분 $M_{2026}Q_{2026}$ 하나이다. 이제 이 선분의 길이를 구하자. 직선 AB의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이고 $\alpha(Q_n)-\alpha(M_n)=\frac{48n+63}{14}$이므로, $\overline{M_nQ_n}=\frac{5}{3}\cdot\frac{48n+63}{14}=\frac{5(16n+21)}{14}$을 얻는다. 이제 $n=2026$을 대입하면 $\overline{M_{2026}Q_{2026}}=\frac{162185}{14}$이 된다. 따라서 구하는 선분의 길이는 $\frac{162185}{14}$이다.

○ 채점기준

(4점) 한 주기에서 점 D가 선분 M_nQ_n 하나를 이룬다는 사실을 설명할 수 있다.

(3점) 선분들이 점점 커져 전체 자취가 마지막 선분 $M_{2026}Q_{2026}$이 됨을 설명할 수 있다.

(3점) 선분 $M_{2026}Q_{2026}$의 길이를 정확히 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 2 −iv]

점 C가 $n \le x \le n+\frac{1}{2}$ (n은 정수)에서 움직일 때 선분 CD가 만드는 도형을 R_n라 하고, $n+\frac{1}{2} \le x \le n+1$에서 움직일 때 만드는 도형을 T_n이라 하자.

① 먼저 도형 R_n이 도형 T_n에 포함됨을 보이자.

$n \le x \le n+\frac{1}{2}$에서의 곡선은 $y=-2(x-n)^2+(x-n)$이고 $x=n+\frac{1}{2}$에서의 접선은 $y=-x+n+\frac{1}{2}$이다. 이 곡선과 접선의 위치관계를 살펴보자. $n \le x \le n+\frac{1}{2}$에서 $\left(-x+n+\frac{1}{2}\right)-\left(-2(x-n)^2+(x-n)\right)=2\left(x-n-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$이므로, $n \le x \le n+\frac{1}{2}$에서의 곡선은 항상 $x=n+\frac{1}{2}$에서의 접선 아래에 놓인다. [문제 2−iii]에서 이미 보였듯이, 같은 한 주기 $n \le x \le n+1$ 안에서는 점 D가 움직이는 범위가 선분 M_nQ_n 이다. 따라서 $n \le x \le n+\frac{1}{2}$에서 생기는 모든 선분 CD의 아래쪽 끝점 D는 모두 선분 M_nQ_n 위에 있다. 한편 $n+\frac{1}{2} \le x \le 1$에서 생기는 도형 T_n은, 위쪽 경계인 직선 $y=-x+n+\frac{1}{2}$과 아래쪽 경계인 직선 AB 및 직선 $y=x-n-1$ 사이의 영역을 포함한다. 특히 점 $\left(n+\frac{1}{2},0\right)$, M_n, Q_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 전체가 T_n 안에 들어간다. 실제로 $\alpha(Q_n) \le x \le n+\frac{1}{2}$에서는 T_n의 아래 경계가 직선 $y=x-n-1$ 인데, 이 직선은 점 Q_n과 점 $\left(n+\frac{1}{2},0\right)$을 이은 선분보다 더 아래에 있으므로, 그 삼각형이 통째로 T_n에 포함된다. 또 $n \le x \le n+\frac{1}{2}$에서의 곡선은 x축 위쪽에 있고, 방금 확인한 것처럼 직선 $y=-x+n+\frac{1}{2}$ 아래에 있으므로 $n \le x \le n+\frac{1}{2}$인 모든 점 C는 이 삼각형 안에 있다. 삼각형 내부의 임의의 두 점을 이은 선분은 다시 삼각형 안에 놓여 있으므로, 밑변 M_nQ_n 위의 점 D와 삼각형 안의 점 C를 이은 선분 CD도 삼각형 안에 놓인다. 따라서 $n \le x \le n+\frac{1}{2}$에서 생기는 선분들은 모두 이미 T_n 안에 들어 있으며, 곧 R_n은 T_n 안에 들어있게 된다.

논술문제 해설지 (수리형)

② 다음으로 도형 T_n이 도형 T_{n+1}에 포함됨을 보이자. $x=n+\frac{3}{2}$에서의 접선은 $y=-x+n+\frac{3}{2}$이다. $n+\frac{1}{2}\le x\le n+1$에서의 곡선 $y=2(x-n)^2-3(x-n)+1$과 방금 구한 접선을 비교하면 $\left(-x+n+\frac{3}{2}\right)-(2(x-n)^2-3(x-n)+1)=\frac{1}{2}+2(x-n)(1-(x-n))>0$이 성립한다. 따라서 $n+\frac{1}{2}\le x\le n+1$에서 생긴 도형은 $n+\frac{3}{2}\le x\le n+2$에서 생긴 도형 안에 들어간다. 결국 전체 도형은 $2026+\frac{1}{2}\le x\le 2027$에서 생기는 도형 하나와 같다.

이제 일반적인 n에 대해 T_n의 넓이 S_n을 구하자. T_n은 다음과 같이 세 부분으로 나누어 적분할 수 있다.

$$S_n=\int_{\alpha(\mathrm{M}_n)}^{\alpha(\mathrm{Q}_n)}\left\{\left(-x+n+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{4}{3}x-1\right)\right\}dx+\int_{\alpha(\mathrm{Q}_n)}^{n+\frac{1}{2}}\left\{\left(-x+n+\frac{1}{2}\right)-(x-n-1)\right\}dx$$
$$+\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1}\{(2(x-n)^2-3(x-n)+1)-(x-n-1)\}dx$$

여기서 $\alpha(\mathrm{M}_n)=-3n-\frac{9}{2}$, $\alpha(\mathrm{Q}_n)=\frac{3n}{7}$이므로 계산하면 $S_n=\frac{16}{7}n^2+6n+\frac{95}{24}$를 얻는다. 따라서 $n=2026$을 대입하면 $S_{2026}=\frac{1578238457}{168}$이 된다. 따라서 선분 CD가 이루는 도형의 면적은 $\frac{1578238457}{168}$이다.

* S_{2026}을 다음과 같은 방식으로도 계산할 수 있다. M_{2026}, $\left(-\frac{3}{4},0\right)$, $\left(\frac{4053}{2},0\right)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이와 Q_{2026}, $\left(-\frac{3}{4},0\right)$, $(2027,0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 합에서 구간 $\left[\frac{4053}{2},2027\right]$에서의 곡선과 x축 사이의 넓이를 빼는 방식으로 구할 수 있다.

○ 채점기준

(4점) 앞에서 생긴 도형이 뒤에서 생긴 도형에 차례로 포함되어 전체 도형이 $2026+\frac{1}{2}\le x\le 2027$에서 생기는 도형이 됨을 설명할 수 있다.

(3점) $2026+\frac{1}{2}\le x\le 2027$에서 생기는 도형을 적분으로 올바르게 분할하여 넓이에 관한 식을 세울 수 있다.

(3점) 최종 면적을 정확히 구할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3]

■ 개요 및 주요 평가항목

수직선의 0 이상인 부분을 길이가 $\frac{1}{3}$인 구간들로 나누고, 각 구간에 1번부터 6번까지의 번호를 반복하여 부여한 상황을 바탕으로, 수열 $\sqrt{n^2+kn}$의 각 항이 어느 번호의 구간에 속하는지를 판단하는 문제이다. 완전제곱식을 활용하여 수열 $\sqrt{n^2+kn}$을 $n+\frac{k}{2}$와 비교하고, 두 값의 차이를 추정함으로써 각 항이 어느 번호의 구간에 들어가는지 판별하거나, 주어진 조건을 만족하는 항의 개수를 구하는 능력을 평가하고자 한다.

[문제 3 – i]

완전제곱식을 활용해 수열 $\sqrt{n^2+21n}$을 $n+\frac{21}{2}$과 비교하고, 두 값의 차이의 범위를 이용하여 수열의 특정 항이 들어가는 구간의 번호를 판별할 수 있는지 평가한다.

[문제 3 – ii]

수열의 항이 특정 번호 구간에 들어가기 위한 조건을 경우를 나누어 분석하고, 그 개수를 구할 수 있는지 평가한다.

[문제 3 – iii]

자연수 k에 따른 규칙성을 파악하여 A_k를 구하고, 이를 이용해 주어진 합의 값을 계산할 수 있는지 평가한다.

논술문제 해설지 (수리형)

■ 예시답안 및 채점기준

[문제 3 – i]

○ 예시답안

$k=21$에 대하여 완전제곱식을 이용하면

$$\sqrt{n^2+21n}<\sqrt{n^2+21n+\left(\frac{21}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(n+\frac{21}{2}\right)^2}=n+\frac{21}{2}$$

이므로,

$$d_n=n+\frac{21}{2}-\sqrt{n^2+21n}=\frac{\frac{441}{4}}{n+\frac{21}{2}+\sqrt{n^2+21n}}$$

이라 하자. 이 경우 $a_n=n+\frac{21}{2}-d_n$이 성립한다. 즉

$$a_{500}=510+\left(\frac{1}{2}-d_{500}\right),\quad a_{2027}=2036+\left(\frac{3}{2}-d_{2027}\right)$$

이다. $n\geq 500$이면 $0<d_n\leq\frac{441}{8n}\leq\frac{441}{4000}<\frac{1}{6}$이므로

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}-d_n<\frac{1}{2},\quad \frac{4}{3}<\frac{3}{2}-d_n<\frac{3}{2}$$

이 성립한다. 따라서

$$a_{500}\in\left(510+\frac{1}{3},510+\frac{1}{2}\right),\quad a_{2027}\in\left(2036+\frac{4}{3},2036+\frac{3}{2}\right)$$

이다. 그러므로 a_{500}는 2번 구간에, a_{2027}은 5번 구간에 들어간다.

○ 채점기준

(5점) $a_{500}=510+\left(\frac{1}{2}-d_{500}\right)$, $a_{2027}=2036+\left(\frac{3}{2}-d_{2027}\right)$의 꼴로 놓고, $0<d_n<\frac{1}{6}$을 보이거나, 이에 준하는 방법으로 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}-d_n<\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}<\frac{3}{2}-d_n<\frac{3}{2}$을 올바르게 구할 수 있다.

(5점) 이를 이용하여 a_{500}이 2번 구간에, a_{2027}이 5번 구간에 들어감을 결론낼 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3 – ii]

○ 예시답안

자연수 k에 대하여

$$d_n = n + \frac{k}{2} - \sqrt{n^2+kn} = \frac{\frac{k^2}{4}}{n+\frac{k}{2}+\sqrt{n^2+kn}}$$

이라 하자. $n \geq 500$이면 $d_n < \frac{k^2}{8n} \leq \frac{k^2}{4000}$이므로 $k \leq 43$일 경우 $0 < d_n < \frac{1}{2}$이 성립한다.

번호 배열은 길이가 2를 주기로 반복되므로, $\sqrt{n^2+41n}$이 5번 구간에 들어가면 모든 정수 l에 대해 $\sqrt{n^2+41n}-2l$이 5번 구간들에 들어간다.

만약 n이 짝수이면 $\sqrt{n^2+41n}-(n+20) = \frac{1}{2} - d_n$이고, $n+20$이 짝수이므로 a_n이 들어가는 구간은 $\frac{1}{2}-d_n$이 어느 구간에 들어가는지에 따라 결정된다. 그런데 $0 < \frac{1}{2}-d_n < \frac{1}{2}$이므로 a_n은 1번 또는 2번 구간에만 들어갈 수 있다. 즉, n이 짝수일 경우 a_n은 5번 구간에 들어갈 수 없다.

n이 홀수이면 $\sqrt{n^2+41n}-(n+19) = \frac{3}{2} - d_n$이고, $n+19$가 짝수이므로 a_n이 들어가는 구간은 $\frac{3}{2}-d_n$이 어느 구간에 들어가는지에 따라 결정된다. $1 < \frac{3}{2}-d_n < \frac{3}{2}$이므로 a_n이 5번 구간에 들어가기 위해선 $\frac{4}{3} \leq \frac{3}{2}-d_n < \frac{5}{3}$이 성립해야 하고, 즉 $0 < d_n \leq \frac{1}{6}$이 만족되어야 한다. 이 부등식을 n에 관해 정리하면 $\frac{3721}{3} \leq n$이 되므로, 이를 만족하는 $500 \leq n \leq 2027$인 홀수 n의 개수는 394가 된다.

따라서 5번 구간에 들어가는 a_n의 개수는 394개가 된다.

○ 채점기준

(4점) n이 짝수이면 a_n은 5번 구간에 들어갈 수 없음을 올바르게 설명할 수 있다.

(6점) n이 홀수일 때 a_n이 5번 구간에 들어가기 위한 조건이 $0 < d_n \leq \frac{1}{6}$임을 구하고, 이를 n에 대한 조건으로 바꾸어 해당 n의 개수가 정확히 394개 임을 설명할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3 – iii]

○ 예시답안

[문제 3 – ii]의 답안에서 $21 \le k \le 43$일 경우 $0 < d_n < \frac{1}{2}$이 됨을 확인하였다. $\sqrt{n^2+kn}$이 3번 구간에 들어가면 모든 정수 l에 대해 $\sqrt{n^2+kn}-2l$이 3번 구간들에 들어간다.

만약 n이 홀수이면 $\sqrt{n^2+kn}-(n-1)=\sqrt{n^2+kn}-\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{k}{2}+1=\frac{k}{2}+1-d_n$이고 $n-1$이 짝수이므로 $\sqrt{n^2+kn}$이 3번 구간에 들어가려면, $\frac{k}{2}+1-d_n$이 3번 구간에 들어가야 한다. 즉, k가 $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$일 경우 각각 $\frac{3}{2}-d_n$, $2-d_n$, $\frac{1}{2}-d_n$이 구간 $\left[\frac{2}{3},1\right)$에 들어가야 하는데 $0 < d_n < \frac{1}{2}$이므로 불가능하다.

이제 $500 \le n \le 2027$인 짝수만 고려하자. 이 경우

$$\sqrt{n^2+kn}-n=\sqrt{n^2+kn}-\left(n+\frac{k}{2}\right)+\frac{k}{2}=\frac{k}{2}-d_n$$

이고 n이 짝수이므로 $\sqrt{n^2+kn}$이 3번 구간에 들어가려면, $\frac{k}{2}-d_n$이 3번 구간에 들어가야 한다. $0 < d_n < \frac{1}{2}$이므로, k가 홀수이면 $\frac{1}{2}-d_n$ 또는 $\frac{3}{2}-d_n$이 구간 $\left[\frac{2}{3},1\right)$에 들어가야 하는데 이는 $0 < d_n < \frac{1}{2}$임을 고려하면 불가능하다. 즉, $21 \le k \le 43$인 $k=4m+1$, $4m+3$에 대해 $A_k=0$이 되어 $\sum_{m=5}^{10} A_{4m+1}=\sum_{m=5}^{10} A_{4m+3}=0$이다. 그리고 $k=4m+2$인 경우에는 $1-d_n$이 구간 $\left[\frac{2}{3},1\right)$에 들어가야 하므로 $0 < d_n \le \frac{1}{3}$이 만족되어야 한다. 즉 $6m^2+4m+\frac{2}{3} \le n$이 성립되어야 한다. 이는 각각의 고정된 $5 \le m \le 10$에 대하여 $500 \le n \le 2026$인 짝수 중 $6m^2+4m+1 \le n$을 만족하는 n의 개수가 A_{4m+2}가 된다. $m=5,6,7,8$인 경우 $6m^2+4m+1 < 500$이므로 $A_{22}=A_{26}=A_{30}=A_{34}=764$이고, $9 \le m \le 10$인 경우 $6m^2+4m+1 \ge 500$이므로 $A_{4m+2}=1013-3m^2-2m$이고, 따라서 $A_{38}=752$, $A_{42}=693$이다. 그러므로

$$\sum_{m=5}^{10}\left(A_{4m+1}+A_{4m+2}+A_{4m+3}\right)=\sum_{m=5}^{10} A_{4m+2}=4501$$

이다.

논술문제 해설지 (수리형)

○ 채점기준

(3점) n이 홀수이면 a_n이 3번 구간에 들어갈 수 없음을 올바르게 설명할 수 있다.

(3점) $\sum_{m=5}^{10} A_{4m+1} = \sum_{m=5}^{10} A_{4m+3} = 0$임을 구할 수 있다.

(4점) $A_{22} = A_{26} = A_{30} = A_{34} = 764$, $A_{38} = 752$, $A_{42} = 693$을 올바르게 구하여, 이를 이용하여 최종값이 4501임을 도출할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

■ 별해

[문제 3 –i]

$n \geq 500$일 경우 $n+10 < a_n < n+11$이다. $a_n - (n+10) < \frac{1}{3}$이고 $(n+11) - a_n < \frac{1}{3}$이므로

$$n+10+\frac{1}{3} < a_n < n+10+\frac{2}{3}$$

이 성립한다. 따라서,

$$510+\frac{1}{3} < a_{500} < 510+\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad a_{500} : \boxed{2}\text{번 구간}$$

$$2036+\frac{4}{3} < a_{2027} < 2036+\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad a_{2027} : \boxed{5}\text{번 구간}$$

○ 채점기준

(5점) $n+10+\frac{1}{3} < a_n < n+10+\frac{2}{3}$임을 올바르게 구할 수 있다.

(5점) 이를 이용하여 a_{500}이 $\boxed{2}$번 구간에, a_{2027}이 $\boxed{5}$번 구간에 들어감을 결론낼 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3 – ii]

$n \geq 500$일 경우 $n+20 < a_n < n+21$이므로 $0 < a_n - (n+20) < 1$이다. 즉, n이 짝수이면 a_n이 5번 구간에 들어갈 수 없다. 홀수인 n에 대하여 a_n이 5번 구간에 들어가려면

$$\frac{1}{3} \leq a_n - (n+20) < \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{3721}{3} \leq n$$

이 성립한다. 이를 만족하는 $500 \leq n \leq 2027$인 홀수 n의 개수는 394이다.

○ 채점기준

(4점) n이 짝수이면 a_n은 5번 구간에 들어갈 수 없음을 올바르게 설명할 수 있다.

(6점) n이 홀수일 때 a_n이 5번 구간에 들어가기 위한 조건이 $\frac{3721}{3} \leq n$ 임을 구하고, 해당 n의 개수가 정확히 394개 임을 설명할 수 있다.

논술문제 해설지 (수리형)

[문제 3 – iii]

$a_n = \sqrt{n^2 + (4m+1)n}$ $(n \geq 500,\ 5 \leq m \leq 10)$이면 $n+2m < a_n < n+2m+1$이다. 따라서 3번 구간에 들어가려면 n은 짝수이고, $(n+2m+1) - a_n \leq \frac{1}{3}$이어야 한다. 조건을 만족하는 n은 존재하지 않는다. 따라서 $\sum_{m=5}^{10} A_{4m+1} = 0$이다.

$a_n = \sqrt{n^2 + (4m+3)n}$ $(n \geq 500,\ 5 \leq m \leq 10)$이면 $n+2m+1 < a_n < n+2m+2$이다. 따라서 3번 구간에 들어가려면 n은 홀수이고, $(n+2m+2) - a_n \leq \frac{1}{3}$이어야 한다. 조건을 만족하는 n은 존재하지 않는다. 따라서 $\sum_{m=5}^{10} A_{4m+3} = 0$이다.

$a_n = \sqrt{n^2 + (4m+2)n}$ $(n \geq 500,\ 5 \leq m \leq 10)$이면 $n+2m < a_n < n+2m+1$이다. 따라서 3번 구간에 들어가려면 n은 짝수이고, $(n+2m+1) - a_n \leq \frac{1}{3}$이어야 한다. 따라서

$n \geq 6m^2 + 4m + \frac{2}{3}$인 짝수이다.

(이후 예시답안과 동일)

○ 채점기준

(3점) $\sum_{m=5}^{10} A_{4m+1} = \sum_{m=5}^{10} A_{4m+3} = 0$임을 구할 수 있다.

(3점) n이 홀수이면 a_n이 3번 구간에 들어갈 수 없음을 올바르게 설명할 수 있다.

(4점) $A_{22} = A_{26} = A_{30} = A_{34} = 764$, $A_{38} = 752$, $A_{42} = 693$을 올바르게 구하여, 이를 이용하여 최종값이 4501임을 도출할 수 있다.


1398
성균관대학교
SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY