1 서울캠퍼스 자연계열 논술고사

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	[교육과정문서] 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 〈공통과목〉 -과목명: 수학 〈일반선택〉 -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 〈진로선택〉 -과목명: 기하
	핵심개념 및 용어	공간좌표, 두 점 사이의 거리, 입체도형의 부피
예상 소요 시간	60분	

3. 출제 의도

공학적 소재를 활용하여 수학적 능력을 측정하고자 함. 좌표공간에서의 두 점 사이의 거리와 단면의 넓이를 이용한 입체도형의 부피를 구하는 문항으로 기하와 미적분 두 과목을 융합하여 학생들의 종합적인 사고력을 요구하는 문항임.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

제시문

	교육과정 및 성취기준
1	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 2 공간좌표 [12기하03-04] 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다.
2	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 2 공간좌표 [12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

		교육과정 및 성취기준
문항 (1)	1	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 2 공간좌표 [12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	2	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 1 공간도형 [12기하03-03] 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.
	3	[미적분] - (2) 미분법 - 2 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.

		교육과정 및 성취기준
문항 (2)	1	[기하] - (3) 공간도형과 공간좌표 - 2 공간좌표 [12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
	2	[수학I] - (1) 지수함수와 로그함수 - 1 지수와 로그 [12수학I01-03] 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

		교육과정 및 성취기준
문항 (3)	1	[미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
	2	[미적분] - (1) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

		교육과정 및 성취기준
문항 (4)	1	[미적분] - (3) 적분법 - 2 정적분의 활용 [12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
	2	[미적분] - (1) 적분법 - 1 여러 가지 적분법 [12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	3	[수학II] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12수학II01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	기하	권오남 외	교학사	2021	142-147
	미적분	홍성복 외	지학사	2022	80-103, 138-155, 167-169
	수학 Ⅰ	류희찬 외	천재교과서	2020	12-60
	수학 Ⅱ	김원경 외	비상교육	2020	11-24

5. 문항 해설

1-(1) 제시문에 주어진 입체도형의 정보를 사용하여 실리콘이 쌓인 부분의 높이와 반지름을 구한다.
1-(2) 실리콘이 쌓인 부분을 xy평면과 평행인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이를 구한다.
1-(3) 앞의 결과를 적분하여 실리콘이 쌓인 부분의 부피를 구한다.
1-(4) 실리콘의 증발량이 0으로 수렴할 때 기판에 쌓이는 실리콘의 부피의 극한값이 총 뿌려진 실리콘의 부피를 나타낸다는 점을 사용하여, 증발하지 않고 남아있는 실리콘의 비율을 구한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	가장 높이 쌓인 곳의 높이를 정확히 구함(3점). 반지름의 길이를 정확히 구함(4점).	7
(2)	단면의 모양을 정확히 서술함(2점). 정확한 풀이 과정을 통해 $S(t)$를 구함(5점).	7
(3)	부피를 적분 식으로 표현함(2점). 적분을 정확히 계산하여 답을 구함(5점).	7
(4)	임의의 상수 C에 대해서 실리콘이 쌓인 부분의 부피를 구함(3점). $C \to 0+$일 때의 극한값을 정확히 구함(2점) 기판에 남아있는 실리콘의 비율을 정확히 구함(4점).	9

7. 예시 답안

(1) $\frac{1}{d^3} \geq \frac{1}{8}$일 때, 점 Q에서 실리콘이 쌓인 부분의 높이는 $\frac{1}{d^3} - \frac{1}{8}$이므로 d가 작을수록 높이가 높다. xy평면에서 점 P에 가장 가까운 점은 원점이며, 이때 $d = 1$이므로 가장 높이 쌓인 곳의 높이 $t_{\max}$는 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$이다.

또한, 점 Q에서 원점까지의 거리를 r이라 할 때, $d = \sqrt{1+r^2}$이므로 실리콘이 쌓인 부분은

$\frac{1}{d^3}=\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}>\frac{1}{8}$을 만족한다. 즉, $0 \le r < \sqrt{3}$이므로 실리콘이 쌓인 부분의 반지름의 길이는 $R=\sqrt{3}$이다.

(다른 풀이) 점 Q에서 원점까지의 거리를 r이라 하자. $\frac{1}{d^3} \ge \frac{1}{8}$일 때, 점 Q에 쌓인 실리콘의 높이는 $h(r)=\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{8}$이다. 실리콘이 쌓인 부분은 $h(r)>0$ 또는 $0 \le r < \sqrt{3}$을 만족하므로 해당 부분의 반지름의 길이는 $R=\sqrt{3}$이다.

또한 $r>0$ 일 때 $h'(r)=-\frac{3r}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}}<0$이므로, $h(r)$는 구간 $0 \le r < \sqrt{3}$에서 감소하여 높이의 최댓값은 $h(0)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$이다.

(2) 점 Q에서 원점까지의 거리를 r이라 할 때, 실리콘이 쌓인 높이 $h(r)$은 r에 대하여 감소하는 함수이므로, 높이가 $h(r)=t$인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 r인 원 모양이며, 단면의 넓이는 πr^2이다. $h(r)=\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{8}=t$로부터, $r^2=\left(\frac{1}{8}+t\right)^{-\frac{2}{3}}-1$이므로

$S(t)=\pi r^2=\pi\left\{\left(\frac{1}{8}+t\right)^{-\frac{2}{3}}-1\right\}$이다. (단, $0 \le t \le \frac{7}{8}$)

(3) 문항(2)의 결과를 사용하여 실리콘이 쌓인 부분의 부피를 구하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{7}{8}} S(t)dt &= \int_0^{\frac{7}{8}} \pi\left\{\left(\frac{1}{8}+t\right)^{-\frac{2}{3}}-1\right\}dt \\ &= \left[\pi\left\{3\left(\frac{1}{8}+t\right)^{\frac{1}{3}}-t\right\}\right]_0^{\frac{7}{8}} \\ &= \pi\left\{\left(3-\frac{7}{8}\right)-3\times\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right\} \\ &= \frac{5\pi}{8}\end{aligned}$$

(4) 앞의 문항과 동일한 방법으로 상수 $0<C<1$에 대하여 실리콘이 쌓인 부분의 부피를 구하면

$$\begin{aligned}\int_0^{1-C} S(t)dt &= \int_0^{1-C} \pi\left((C+t)^{-\frac{2}{3}}-1\right)dt \\ &= \pi\left[3(C+t)^{\frac{1}{3}}-t\right]_0^{1-C} \\ &= \pi\left[\{3-(1-C)\}-3C^{\frac{1}{3}}\right] \\ &= \pi\left(2+C-3C^{\frac{1}{3}}\right)\end{aligned}$$

이므로, $C \to 0+$일 때의 극한값은 2π이다. 이는 실리콘의 증발량이 0으로 수렴할 때 기판에 쌓이는 실리콘의 부피의 극한값이므로, 뿌려진 실리콘의 총 부피를 나타낸다. 따라서, $C=\frac{1}{8}$일 때 기판에 남아 있는 실리콘의 부피의 비율은 $\frac{\frac{5\pi}{8}}{2\pi}=\frac{5}{16}$이다.