1 세종캠퍼스 자연계열 논술고사

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 삼각합수
	핵심개념 및 용어	삼각함수 사이의 관계, 사인함수와 코사인함수의 성질, 이차함수의 최대와 최소
예상 소요 시간	10분	

3. 출제 의도

삼각함수 사이의 관계($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)를 이용하여 주어진 함수를 하나의 삼각함수에 대한 이차함수로 변환할 수 있는지를 평가한다. 또한, 치환을 통해 얻어진 이차함수의 정의역을 올바르게 파악하고, 해당 범위 내에서 최댓값을 구하는 능력을 확인하고자 한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[교육과정문서] 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 〈공통과목〉 -과목명: 수학 〈일반선택〉 -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 〈진로선택〉 -과목명: 기하
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1	[수학Ⅰ] - (2) 삼각함수 - ① 삼각함수 [12수학Ⅰ02-02] 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.
2	[수학] - (1) 문자와 식 - ⑤ 이차방정식과 이차함수 [10수학01-11] 이차함수의 최대, 최소를 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	김원경 외	비상	2021	73-75

5. 문항 해설

$\sin^2x=1-\cos^2x$ 관계식을 이용하여 주어진 함수를 $\cos x$에 대한 이차함수로 변환한다. $\cos x$를 t로 치환하여 t에 대한 이차함수를 만들고, $\cos x$의 범위에 따라 t의 범위를 $-1\le t\le 1$로 설정한다. 주어진 범위에서 이차함수의 꼭짓점 위치를 파악하여 최댓값을 구하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$\sin^2x=1-\cos^2x$를 이용하여 함수를 $\cos x$에 대한 식으로 변환한다.	3
(2)	$t=\cos x$로 치환하고, t의 범위를 $-1\le t\le 1$로 설정하여 t에 대한 이차함수로 나타낸다.	4
(3)	주어진 t의 범위에서 이차함수의 최댓값을 정확히 구한다.	3

7. 예시 답안

문제의 풀이는 (가)~(다)의 절차에 준한다.

(가) 공식 $\sin^2x=1-\cos^2x$을 이용하여 주어진 식을 다음과 같이 바꾼다.

$$y=2\sin^2x-4\cos x=2(1-\cos^2x)-4\cos x=-2\cos^2x-4\cos x+2$$

(나) 이제, $t=\cos x$라 치환하면, 위 식은

$$y=-2t^2-4t+2=-2(t+1)^2+4$$

한편, $\cos x$는 -1과 1 사이의 모든 값을 가질 수 있으므로, $-1\le t\le 1$이다.

(다) $y=-2(t+1)^2+4$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이며, 꼭짓점은 y는 $t=-1$일 때 최대가 되며, $t=-1$은 주어진 범위 $-1\le t\le 1$에 포함되므로 y는 $t=-1$일 때, 즉 $x=\pi$일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 최댓값은 $y=-2(-1+1)^2+4=4$임을 알 수 있다.

2 세종캠퍼스 자연계열 논술고사

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 로그함수
	핵심개념 및 용어	로그의 뜻과 성질, 로그의 밑의 변환, 로그방정식
예상 소요 시간	10분	

3. 출제 의도

로그방정식을 풀기 위해 가장 먼저 로그의 밑과 진수 조건을 정확히 파악하여 해의 범위를 설정할 수 있는지를 평가한다. 또한, 밑 변환 공식을 이용하여 복잡한 로그방정식을 간단한 형태로 변형하고, 이를 통해 논리적으로 해를 추론하는 능력을 확인하고자 한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[교육과정문서] 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 〈공통과목〉 -과목명: 수학 〈일반선택〉 -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 〈진로선택〉 -과목명: 기하
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1	[수학Ⅰ] - (2) 지수함수와 로그함수 - 2 지수함수와 로그함수 [12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	김원경 외	비상	2021	23-28, 51-52

5. 문항 해설

로그의 밑은 1이 아닌 양수이고, 진수는 양수여야 한다는 조건을 먼저 확인한다. 그 후, 밑 변환 공식을 사용하여 양변의 밑을 통일시킨다. 방정식을 정리하여 해를 구하고, 이 해가 처음에 구한 밑과 진수 조건을 만족하는지 반드시 검증해야 하는 문제이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	로그의 진수 조건을 이용하여 x의 범위를 정확하게 구한다.	2
(2)	밑 변환 공식을 이용하여 양변의 밑을 통일하고, 진수끼리의 방정식으로 유도한다.	4
(3)	유도된 이차방정식을 풀어 x의 후보 값을 모두 찾는다.	2
(4)	(1)에서 구한 x의 범위를 고려하여 조건에 맞지 않는 값을 제외하고 최종 해를 결정한다.	2

7. 예시 답안

[풀이] 문제의 풀이는 (가)~(라)의 절차에 준한다.

로그 $\log_a b$에서 a를 로그의 밑이라 하고, b를 로그의 진수라 부른다.

(가) 로그의 진수는 양수이어야 하므로 아래의 요건을 갖는다.

$$x+2>0, \quad x^2>0$$

다시 말하면, $x>-2$이고 동시에 $x\neq 0$이어야 한다.

(나) 아래의 2가지 중 하나의 방법으로 해결할 수 있다.

(방법1) 로그의 성질을 이용하여

$$\log_2(x+2)=\frac{\log_a(x+2)}{\log_a 2},$$

$$\log_4 x^2 = \frac{\log_a x^2}{\log_a 4} = \frac{\log_a x^2}{2\log_a 2} = \frac{\log_a \sqrt{x^2}}{\log_a 2} = \frac{\log_a |x|}{\log_a 2}$$

(여기서 로그의 밑인 a는 2, 3, 4, ..., 10 또는 e 등, 양수이면서 1이 아니기만 하면 된다.)
따라서

$$\frac{\log_a (x+2)}{\log_a 2} = \frac{\log_a |x|}{\log_a 2} \quad \text{또는} \quad x+2=|x| \quad (x>-2,\ x\neq 0) \quad \text{----------} \quad (1)$$

(방법2) 밑 4를 밑이 2인 로그로 바꾸는 방법을 사용하면 아래와 같다.
$\log_2 (x+2) = \log_4 x^2 = \log_{2^2} |x|^2 = \log_2 |x|$이므로 $x+2=|x| \quad (x>-2,\ x\neq 0)$

(다) ① 먼저, $-2<x<0$이라 하면, 식 (1)은

$$x+2=-x$$

가 되어, 이로부터 $x=-1$을 얻는다.
② 이제, $x>0$이라 하면, 식 (1)은

$$x+2=x$$

가 되며, 이것의 해는 존재하지 않는다.

(라) 따라서 정답은 $x=-1$이다.

3 세종캠퍼스 자연계열 논술고사

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 I, 수열
	핵심개념 및 용어	수열의 합과 일반항 사이의 관계, 등차수열의 일반항,
예상 소요 시간	10분	

3. 출제 의도

수열의 합과 일반항 사이의 관계$(a_1 = S_1, n \geq 2$ 일 때 $a_n = S_n - S_{n-1})$를 정확히 이해하고 이를 이용하여 일반항을 유도할 수 있는지 평가한다. 또한, 구해진 일반항을 바탕으로 새로운 수열의 규칙을 파악하고 시그마(Σ) 기호의 성질과 자연수 거듭제곱의 합 공식을 활용하여 정확하게 계산할 수 있는지 확인한다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[교육과정문서] 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] "수학과 교육과정"의 〈공통과목〉 -과목명: 수학 〈일반선택〉 -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 〈진로선택〉 -과목명: 기하
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ① 등차수열과 등비수열 [12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
2	[수학Ⅰ] - (3) 수열 - ② 수열의 합 [12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 I	김원경 외	비상	2021	117-122, 123-125, 126

5. 문항 해설

$n=1$일 때 $a_1=S_1$을 구하고, $n\geq 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 일반항 a_n을 도출하는 교과서 기본 원리를 묻는 문제이다. 유도된 a_n식에 $n=1$을 대입한 값이 초깃값 a_1과 일치함을 확인하여 모든 자연수 n에 대해 성립하는 일반항을 확정한다. 이후 도출된 일반항에 $n=2k$를 대입하여 a_{2k}를 구하고, Σ 공식 또는 등차수열의 합 공식을 이용하여 값을 계산한다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	$a_1=S_1$임을 이용하여 첫째항을 정확히 구한다.	2
(2)	$n\geq 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용하여 구한 식이 $n=1$일 때도 성립함을 확인하고 일반항a_n을 정확히 제시한다.	3
(3)	일반항을 이용하여 a_{2k}의 식을 올바르게 구한다.	2
(4)	시그마(Σ)의 성질이나 등차수열의 합 공식을 이용하여 $\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$의 최종값을 정확히 계산한다.	3

7. 예시 답안

[풀이]

(1) 일반항 a_n 구하기

수열의 합 $S_n=n^2+3n$에서,

첫째항 $a_1=S_1=1^2+3\times 1=4$이다.

$n\geq 2$일 때, 일반항 a_n은 $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$a_n=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$

$a_n=(n^2+3n)-(n^2-2n+1+3n-3)$

$a_n = (n^2 + 3n) - (n^2 + n - 2)$

$a_n = 2n + 2$이다.

이 식에 $n = 1$을 대입하면 $2 \times 1 + 2 = 4$이므로, 위에서 구한 첫째항 a_1의 값과 일치한다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2n + 2$이다.

(2) $\sum_{k=1}^{5} a_{2k}$의 값 구하기.

(1)에서 구한 일반항 $a_n = 2n + 2$에서 n자리에 $2k$를 대입하면, $a_{2k} = 2 \times 2k + 2 = 4k + 2$이다.

따라서 구하고자 하는 합은 시그마 기호의 성질에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\sum_{k=1}^{5} a_{2k} = \sum_{k=1}^{5} (4k + 2) = 4\sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=1}^{5} 2 = 4 \times \left(\frac{5 \times 6}{2} \right) + 2 \times 5 = 70 .$$

즉, 구하고자 하는 값은 70이다.

4 세종캠퍼스 자연계열 논술고사

1. 일반정보

유형	☑ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	논술전형	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제 4	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 Ⅱ 함수의 극한, 미적분
	핵심개념 및 용어	함수의 극한, 미분계수의 정의, 다항함수의 미분과 활용
예상 소요 시간	15분	

3. 출제 의도

무한대에서의 극한을 통해 다항함수의 최고차항 계수를 판단하는 능력과, 주어진 극한식을 미분계수의 정의로 해석하는 사고력을 평가한다. 또한 이를 바탕으로 함수의 계수를 정확히 구하고, 미분을 통해 속도와 가속도의 개념을 연결하여 계산하는 종합적인 미적분 활용 능력을 측정하는 데 목적이 있다.

4. 출제 근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	[교육과정문서] 교육과학기술부 고시 제2015-74호 [별책 8] “수학과 교육과정”의 〈공통과목〉 -과목명: 수학 〈일반선택〉 -과목명: 수학Ⅰ, 수학Ⅱ, 미적분, 확률과 통계 〈진로선택〉 -과목명: 기하
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
1	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 3 도함수의 활용 [12 수학Ⅱ 02-11] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.
2	[수학Ⅱ] - (1) 함수의 극한과 연속 - 1 함수의 극한 [12 수학Ⅱ 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
3	[수학Ⅱ] - (2) 미분 - 1 미분계수 [12 수학Ⅱ 02-01] 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

나) 자료 출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행 연도	쪽수
고등학교 교과서	수학 Ⅱ	김원경 외	비상교육	2021	51-54, 59-61, 93-95

5. 문항 해설

(1) 이 문항은 함수의 극한과 미분계수 개념을 통합적으로 이해하고 활용하는 능력을 평가하고자 한다. 먼저 $t \to \infty$에서의 극한을 통해 다항함수의 최고차항 계수를 비교하여 a와 b의 관계식을 결정하는 사고가 필요하다. 이어서 $\lim_{t \to 2} \frac{f(t-1)}{t-2}$를 단순 계산이 아닌 미분계수의 정의로 해석하는 것이 핵심이며, 이를 위해 변수 치환과 함께 $f(1)=0$, $t=1$에서의 미분계수의 값이 4임을 도출해야 한다. 이후 세 조건을 이용하여 연립방정식을 구성하고 a, b, c를 구하는 논리적 전개 능력이 요구된다.

(2) 이 문항은 다항함수의 미분과 도함수의 물리적 의미를 이해하고 이를 적용하는 능력을 평가한다. (1)에서 구한 함수 $f(t)$를 바탕으로 정확한 미분 계산을 수행하여 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$를 구해야 하며, 위치함수 $f(t)$의 도함수가 속도 $v(t)$이고, 속도 $v(t)$의 도함수가 가속도 $a(t)$라는 개념을 활용하는 것이 중요하다. 또한 앞선 문항의 결과를 바르게 이어받아 계산하는 과정에서 단계적 사고력이 요구된다. 최종적으로 $t=3$에서의 가속도의 값을 정확히 계산하여 값을 도출하는 것이 핵심이다.

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준	배점
(1)	무한대 극한을 이용한 계수 a와 b의 관계식을 결정함.	2
	주어진 극한을 적절히 해석(미분계수 관점 포함).	4
	조건을 이용한 식 설정 및 계수 관계 도출함.	2
	a, b, c 값 및 함수 완성의 정확성.	2
(2)	위치함수 $f(t)$의 도함수가 속도 $v(t)$이고, 속도 $v(t)$의 도함수가 가속도 $a(t)$임을 이해함.	1
	미분 계산을 통해 위치함수 $f(t)$의 도함수 $v(t)$를 구하고, 또한 $v(t)$의 도함수 $a(t)$를 구함.	2
	$t=3$ 대입 과정의 적절성 및 정확성.	2

7. 예시 답안

[풀이]
문제의 풀이는 (1)~(2)의 절차에 준한다.

(1) 위치함수 $f(t)$의 도함수가 속도 $v(t)$라고 표현할 수 있다. 주어진 조건으로부터

$$\lim_{t\to\infty}\frac{bt^3}{f(t)}$$

$t\to\infty$일 때 다항함수의 극한은 최고차항에 의해 결정되므로 분자와 분모의 최고차항만 비교하면, 아래와 같다.

$$\frac{bt^3}{at^3}=\frac{b}{a}=2$$

따라서, 다음과 같은 첫 번째 관계식을 얻는다.

$$b=2a$$

제시된 다른 조건은 아래와 같다.

$$\lim_{t\to 2}\frac{f(t-1)}{t-2}=4$$

여기서 $x=t-1$로 치환하면 $t\to 2$일 때 $x\to 1$이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$$

이 식이 유한한 값을 가지기 위해서는 $f(1)=0$ 을 만족해야 한다.

따라서 위 극한은 미분의 정의에 의해서 다음의 식을 만족한다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=v(1)=4$$

위에서 도출된 조건으로부터

$$f(1)=a+b+c=0$$
$$v(t)=3at^2+2bt+c \Rightarrow v(1)=3a+2b+c=4$$

a, b, c 상수들은 관계식들로부터 아래와 같이 구할 수 있다.

$$a+b+c=a+2a+c=0 \Rightarrow c=-3a$$

$$3a+2b+c \;=\; 3a+2\times 2a-3a=4a=4$$

$$\Longrightarrow\ \therefore\ \ a=1,\ b=2,\ c=-3$$

최종적으로 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t)=t^3+2t^2-3t$$

(2) 위치함수 $f(t)$의 도함수가 속도 $v(t)$이고, 속도 $v(t)$의 도함수가 가속도 $a(t)$라고 표현할 수 있다. 따라서 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v(t)=3t^2+4t-3$$
$$a(t)=6t+4$$

$t=3$ 에서의 가속도는 다음과 같다.

$$a(3)=6\times 3+4=22$$

따라서, 구하고자 하는 답은 22이다.