한양대학교 2027학년도 신입학전형 수시

자연 계열

모 의 논 술 예 시 답 안

1 번

1. $f(x)=\sqrt{-x^2-4x+1}=\sqrt{5-(x+2)^2}$, $g(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+12$라 하면, $b=\sqrt{5-(a+2)^2}$, $d=\frac{3}{2}c^2-8c+12$이다.

접선의 기울기를 m이라 하면 $m=f'(a)=\frac{-(a+2)}{\sqrt{5-(a+2)^2}}=-\frac{a+2}{b}$라서 $bm=-(a+2)$이고,

$m=g'(c)=3c-8$이므로 $c=\frac{m+8}{3}$이다.

점 P와 점 Q를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{g(c)-f(a)}{c-a}=\frac{\frac{3}{2}c^2-8c+12-b}{c-a}=-\frac{1}{m}$이다.

즉, $m(\frac{3}{2}c^2-8c+12-b)=a-c$가 성립한다.

$\frac{3}{2}c^2-8c=\frac{1}{2}c(3c-16)=\frac{1}{2}c(m-8)=\frac{1}{6}(m+8)(m-8)=\frac{m^2-8^2}{6}$를 이용하면

$$m(\frac{m^2-8^2}{6}+12-b)=a-\frac{m+8}{3}$$
$$\Leftrightarrow m^3+(-8^2+72)m-6mb=6a-2(m+8)$$
$$\Leftrightarrow m^3+8m+6(a+2)=6a-2m-16$$
$$\Leftrightarrow m^3+10m+28=0$$
$$\Leftrightarrow (m+2)(m^2-2m+14)=0$$

판별식을 이용하면 $m^2-2m+14>0$이므로 $m=-2$이다.

이를 대입하면 $c=\frac{-2+8}{3}=2$이고, $-2=\frac{-(a+2)}{\sqrt{5-(a+2)^2}}\Rightarrow 4(5-(a+2)^2)=(a+2)^2\Rightarrow (a+2)^2=4$이라서, $a=0$또는 $a=-4$인데, 기울기$-2=\frac{-(a+2)}{\sqrt{5-(a+2)^2}}$를 만족하기 위해서는 $a=0$임을 알 수 있다.

이를 이용하여 $b=1$, $d=2$를 얻을 수 있고, 따라서 P$(0,1)$, Q$(2,2)$이다.

2. 서준이와 도윤이를 한 묶음으로 생각하면, 서준이와 도윤이가 이웃하게 앉는 경우의 수는 6개의 좌석에 4명이 앉는 경우의 수에 서준이와 도윤이의 자리를 바꾸는 두 가지 방법을 곱하여 얻을 수 있고, 이는 $2\times{}_6\mathrm{P}_4=720$이다.

구하고자 하는 경우의 수는 위 경우의 수에서 도윤이와 민서가 이웃하게 되는 경우의 수를 빼면 된다. 서준이와 도윤이가 이웃하고, 도윤이와 민서가 이웃하게 되는 경우는 서준이, 도윤이, 민서가 모두 이웃하면서 도윤이가 가운데에 앉는 경우이다. 서준이, 도윤이, 민서를 한 묶음으로 생각하여 앉는 경우의 수에, 서준이와 민서의 자리를 바꾸는 두 가지 방법을 고려하면 이러한 경우의 수는 $2\times{}_5\mathrm{P}_3=120$이다.

그러므로 구하고자 하는 경우의 수는 $720-120=600$이다.

3. 지수함수 $y=a^x$와 로그함수 $y=\log_a x$는 그 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이며 $R(a)$는 곡선 $y=a^x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다. 따라서

$$R(a)=2\int_{f(a)}^{g(a)}(x-a^x)\,dx=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{a^x}{\ln a}\right]_{f(a)}^{g(a)}=g(a)^2-f(a)^2-\frac{2(a^{g(a)}-a^{f(a)})}{\ln a}$$
$$=g(a)^2-f(a)^2-\frac{2(g(a)-f(a))}{\ln a}=(g(a)-f(a))\left(g(a)+f(a)-\frac{2}{\ln a}\right)$$

선분 AB의 길이는 $\sqrt{2}(g(a)-f(a))$이므로 $S(a)=2(g(a)-f(a))^2$이다. 그러므로

$$\frac{R(a)}{S(a)}=\frac{g(a)+f(a)-\frac{2}{\ln a}}{2(g(a)-f(a))}=\frac{1+\frac{f(a)}{g(a)}-\frac{2}{g(a)\ln a}}{2\left(1-\frac{f(a)}{g(a)}\right)}\quad\cdots\cdots\ ①$$

한편, $1<a<e^{\frac{1}{e}}$이므로 $\ln a<\frac{1}{e}$이고, $a^e<e<\frac{1}{\ln a}=\log_a e$이다. 또한, $x>0$에 대하여, $a^x<\log_a x$와 $f(a)<x<g(a)$가 동치이다. 그러므로 $f(a)<e<g(a)$이다. $a^{g(a)}=g(a)>e$이므로 $g(a)>\log_a e=\frac{1}{\ln a}$이다. $0<\frac{f(a)}{g(a)}<e\ln a$이므로 $\lim_{a\to 1+}\frac{f(a)}{g(a)}=0$이다. 또한, $a^{g(a)}=g(a)>\frac{1}{\ln a}$이므로 $g(a)>\log_a\left(\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)}{\ln a}$이다. 따라서 $0<\frac{1}{g(a)\ln a}<\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)}$이므로 $\lim_{a\to 1+}\frac{1}{g(a)\ln a}=0$이다. ①에 의해

$$\lim_{a\to 1+}\frac{R(a)}{S(a)}=\lim_{a\to 1+}\frac{1+\frac{f(a)}{g(a)}-\frac{2}{g(a)\ln a}}{2\left(1-\frac{f(a)}{g(a)}\right)}=\frac{1}{2}$$ 이다.

한양대학교 2027학년도 신입학전형 수시

자연 계열

모 의 논 술 예 시 답 안

2 번

1. 점 $\left(t,t+\frac{1}{t}\right)$에서 곡선 $y=x+\frac{1}{x}$에 접하는 접선의 방정식은 $y=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)(x-t)+t+\frac{1}{t}=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)x+\frac{2}{t}$이고 이 접선의 x절편은 $\frac{2t}{1-t^2}$ 이다. 또한, 점 $\left(s,s+\frac{1}{s}\right)$에서 곡선 $y=x+\frac{1}{x}$에 접하는 접선의 방정식은 $y=\left(1-\frac{1}{s^2}\right)x+\frac{2}{s}$이고 이 접선의 x절편은 $-\frac{2s}{s^2-1}$ 이다. 두 접선의 교점의 x좌표를 구해보면 $\left(1-\frac{1}{t^2}\right)x+\frac{2}{t}=\left(1-\frac{1}{s^2}\right)x+\frac{2}{s}$로부터 $\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{s^2}\right)x=\frac{2}{t}-\frac{2}{s}$를 얻고, 이를 정리하면 $x=\frac{2ts}{t+s}$이다. 따라서 교점의 y좌표는 $y=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\frac{2ts}{t+s}+\frac{2}{t}=\frac{2(ts+1)}{t+s}$이다. 두 접선과 x축으로 둘러싸인 도형은 삼각형이므로 이 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2t}{1-t^2}+\frac{2s}{s^2-1}\right)\times\frac{2(ts+1)}{t+s}=\frac{2(s-t)(ts+1)^2}{(1-t^2)(s^2-1)(t+s)}=\frac{32}{15}$$

이다. $t=\frac{1}{2}$일 때, $5\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)^2=4(s^2-1)\left(s+\frac{1}{2}\right)$이고 이를 정리하면 $22s^3-19s^2-52s+4=(s-2)(22s^2+25s-2)=0$을 얻는다. $f(s)=22s^2+25s-2$라 두면 $f(1)=45>0$이고, $s>1$일 때 $f'(s)=44s+25>0$이므로 1보다 큰 모든 실수 s에 대하여 $f(s)>0$이다. 따라서 $s=2$이다.

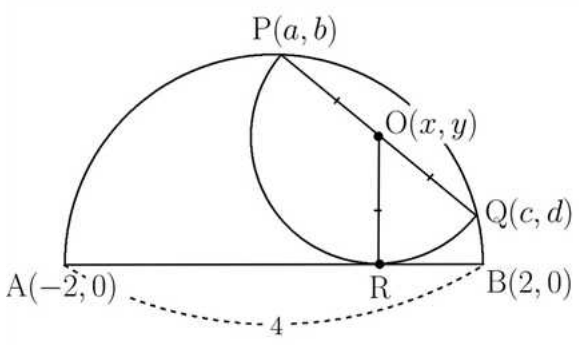
한편, 위에서 얻은 방정식을 정리하면 $(31t^2-16)s^3+(t^3+14t)s^2-(46t^2-31)s-16t^3+t=0$이다. s를 t에 대한 함수로 보고 양변을 t에 대해서 미분하면

$$62ts^3+3(31t^2-16)s^2\frac{ds}{dt}+(3t^2+14)s^2+2(t^3+14t)s\frac{ds}{dt}-92ts-(46t^2-31)\frac{ds}{dt}-48t^2+1=0$$

이고 여기에 $t=\frac{1}{2}$, $s=2$를 대입하면 $\frac{ds}{dt}=4$를 얻는다.

2. 점 P_1의 좌표를 (x_1, y_1)이라 두자. 점 P_1에서 포물선에 접하는 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$이므로 점 H_2의 y좌표는 $\frac{2p(-p+x_1)}{y_1}$이다. 점 P_2의 좌표를 (x_2, y_2)이라 두면 $y_2=\frac{2p(-p+x_1)}{y_1}$이므로 $y_2^2=4px_2$로부터 $x_2=\frac{(x_1-p)^2}{4x_1}$을 얻는다. 이제 점 P_3의 좌표를 (x_3, y_3)라 두면 동일한 방법을 통해 $x_3=\frac{(x_2-p)^2}{4x_2}$을 얻는다. 이때 $\overline{\mathrm{P_1H_1}}=x_1+p$, $\overline{\mathrm{P_2H_2}}=x_2+p$, $\overline{\mathrm{P_3H_3}}=x_3+p$가 이 순서대로 등비수열의 연속된 세 항이므로 $\overline{\mathrm{P_2H_2}}^2=\overline{\mathrm{P_1H_1}}\times\overline{\mathrm{P_2H_2}}$을 만족한다. 따라서 $(x_2+p)^2=(x_1+p)(x_3+p)=\frac{(x_1+p)(x_2+p)^2}{4x_2}$이므로 $x_1+p=4x_2=\frac{(x_1-p)^2}{x_1}$을 얻는다. 이로부터 $x_1=\frac{p}{3}$이다.

3. 오른쪽 그림과 같이 지름의 양 끝점 A, B가 각각 $(-2, 0)$, $(2, 0)$이고 호가 x축 위쪽에 있도록 반원을 좌표평면에 두자. 두 점 P, Q를 각각 (a, b), (c, d)라 하고, 선분 PQ의 중점 O를 (x, y)라 하면,



$a^2+b^2=4$, $c^2+d^2=4$, $\frac{a+c}{2}=x$, $\frac{b+d}{2}=y$,

$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=(2y)^2$ 이 성립한다. a, b, c, d를 소거하고,

y에 대해 정리하면 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$이다. 따라서 구하는 도형은 곡선 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$과 선분 AB로 둘러싸인 도형이다 (이때 $-2\le x\le 2$이고 $0\le y\le\sqrt{2}$이다). 이 도형의 넓이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$이고, $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$는 반지름 2인 반원의 넓이이므로 2π이므로, 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\pi=\sqrt{2}\,\pi$이다.