2027학년도 수시 모의논술고사
출제 의도 및 예시 답안

Ⅰ. 전반적인 출제 의도 및 특징

2027학년도 이화여자대학교의 모의논술고사는 고등학교 교육과정을 통해 함양한 학업역량과 사고력을 종합적으로 평가하고, 대학에서의 학업 수행에 필요한 기본 소양과 발전 가능성을 확인하기 위한 문항을 출제하여 입학전형의 요소로 활용하고자 하였다. 단순한 지식의 암기 여부를 평가하기보다, 교과 내용을 바탕으로 문제를 이해하고 분석하며, 자신의 생각을 논리적으로 전개하고 표현하는 능력을 종합적으로 측정하는 데 목적이 있다.

논술고사는 제시문의 내용을 정확하게 이해하고, 서로 다른 관점과 견해를 비교, 분석하며, 주어진 과제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가한다. 또한 자신의 주장을 합리적인 근거를 바탕으로 일관성 있게 전개하고 효과적으로 표현하는 능력과 함께, 다양한 교과 영역의 내용을 연계하여 종합적으로 사고하는 역량을 확인할 수 있는 평가 방식이다. 이화여자대학교 모의논술고사는 고등학교 교과서에 수록된 동서양의 고전, 문학작품, 사회/문화 관련 비평 등 다양한 제시문을 활용하며, 이를 바탕으로 고등학교 교육과정이 목표로 하는 핵심 역량을 평가할 수 있는 문항들을 구성하였다. 모든 제시문과 문항은 고등학교 교육과정을 충실히 이수한 학생이라면 이해하고 해결할 수 있는 수준에서 출제되었으며, 별도의 선행학습이나 정규 교육과정 밖의 지식을 요구하지 않는다. 아울러 문항은 고교 교육과정의 범위와 수준을 충실히 반영하면서도 수험생의 사고력과 문제 해결 능력을 적절히 변별할 수 있도록 구성하였다. 이를 통해 공교육 중심의 학습을 충실히 수행한 학생들이 자신의 역량을 충분히 발휘할 수 있도록 하고, 고교 교육 정상화와 대학의 학생 선발이라는 논술고사의 본래 취지를 실현하고자 하였다.

Ⅱ. 문항의 구성

본교의 논술고사는 기본적으로 통합논술의 성격을 지닌다. 특정 주제와 관련하여 수험생들이 인문학적 이해 능력과 사회과학적 분석 능력을 갖추고 있는가를 측정하며, 이에 더하여 통합적 사고, 비교 및 대비 능력, 표현 능력 등을 갖추고 있는가를 살피는 데 목적을 두고 있다.

인문Ⅰ 모의논술고사는 인문학적 소양과 사고 능력을 제대로 갖추고 있는가를 묻는 3개 문항으로 구성되어 있으며, 이를 위해 1개의 영어 제시문을 포함하여 총 7개의 제시문이 활용되었다.

인문Ⅱ 모의논술고사는 논리적 추론 능력과 자료 해석 능력을 묻는 3개 문항으로 구성되어 있으며, 이를 위해 5개의 제시문과 2개의 소제시문이 활용되었다.

자연Ⅰ, 자연Ⅱ 모의논술고사는 방정식, 함수, 수열, 극한, 함수의 미분 및 정적분, 확률과 통계 등 고등학교 교육과정에서 다루는 기본적인 개념을 이해하고 이를 종합적으로 활용하여 해결할 수 있는 문제들로 구성되었다. 각 문제당 3~5개의 소문항이 제시되어 문제 해결을 위한 착안, 기획, 수행에 이르게 하는 수리적 사고를 발전시켜 나가는 방식으로 출제되었다.

4. 자연 Ⅱ

[문항1] 함수 $f(x)=|x|e^{|x|}$와 실수 a에 대하여 두 점 $(a, f(a))$, $(a+1, f(a+1))$을 잇는 선분과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(a)$라 할 때, 아래 물음에 답하시오. [40점]

(1) 곡선 $y=f(x)$는 각각의 구간 $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$에서 아래로 볼록함을 보이시오.

(2) $x_1 < x_2$인 실수 x_1, x_2에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}=(x_1, f(x_1))$, $\mathrm{Q}=(x_2, f(x_2))$ 사이의 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있음을 보이시오.

(3) 함수 $S(a)$가 미분가능하지 않은 실수 a의 값을 모두 구하시오.

(4) 함수 $S(a)$의 최솟값을 구하시오.

(5) 방정식 $S(a)=c$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 c의 값을 모두 구하시오.

■ 출제 의도

이 문제는 절댓값과 지수함수를 포함한 함수의 그래프 성질을 분석하고, 곡선과 선분으로 둘러싸인 영역의 넓이의 성질을 탐구하는 과정을 통해 미분과 적분의 활용 능력을 평가하고자 한다. 함수의 연속성, 미분가능성, 도함수와 이계도함수를 이용하여 곡선의 볼록성을 판단하고, 절댓값 함수로 인해 구간이 나뉘는 상황을 적절히 처리하는 수학적 분석 능력을 평가한다. 나아가 미분과 적분, 그래프의 성질, 방정식의 해의 개수 판단을 유기적으로 연결하여 주어진 조건을 만족하는 값을 추론하는 수리적 사고력과 통합적 문제 해결 능력을 평가하고자 한다.

■ 출제 근거

- 수학Ⅱ, 김원경 외, 비상교육: 미분계수 (pp. 51-58), 넓이 (pp. 125-131)
- 수학Ⅱ, 이준열 외, 천재교육: 미분계수 (pp. 53-59), 도형의 넓이 (pp. 132-139)
- 미적분, 김원경 외, 비상교육: 지수함수와 로그함수의 미분 (pp. 55-57), 도함수의 활용과 함수의 그래프 (pp. 99-103), 넓이 (pp. 147-149)
- 미적분, 류희찬 외, 천재교과서: 지수함수와 로그함수의 도함수 (pp. 62-65), 함수의 그래프 (pp. 128-132), 넓이와 부피 (pp. 183-187)

■ 예시 답안

(1) 곡선 $y=f(x)$는 각각의 구간 $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$에서 아래로 볼록함을 보이시오.

풀이: 구간 $(0,\infty)$에서 $f(x)=xe^x$이므로 $f''(x)=(x+2)e^x>0$이다. 따라서 $f(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 아래로 볼록인 함수이다. 한편 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$가 y축에 대하여 대칭이다. 따라서 구간 $(-\infty,0)$에서 $f(x)$는 아래로 볼록인 함수이다. 그러므로 곡선 $y=f(x)$는 각각의 구간 $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$에서 아래로 볼록하다.

(2) $x_1 < x_2$인 실수 x_1, x_2에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P} = (x_1, f(x_1))$, $\mathrm{Q} = (x_2, f(x_2))$ 사이의 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있음을 보이시오.

풀이: 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 두 점 $\mathrm{P} = (x_1, f(x_1))$, $\mathrm{Q} = (x_2, f(x_2))$ $(x_1 < x_2)$에 대하여 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분은 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있음을 보인다. 주어진 함수의 특징에 따라 $x_1, x_2 \geq 0$ 이거나 $x_1, x_2 \leq 0$, 그리고 $x_1 < 0 < x_2$ 인 경우로 나누어 생각한다.

(i) $x_1, x_2 \geq 0$인 경우. 문항(1)의 결과로부터 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 아래로 볼록인 함수이다. 그러므로 곡선의 오목과 볼록의 정의에 의하여 $0 < x_1 < x_2$일 때 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분은 선분 PQ보다 아래쪽에 있다. $x_1 = 0, x_2 = \alpha > 0$이면 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은 $y = e^{\alpha}x$이므로 $0 < x < \alpha$인 실수 x에 대하여 부등식

$$e^{\alpha}x - f(x) = x(e^{\alpha} - e^{x}) > 0$$

을 만족한다. 따라서 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분은 선분 PQ보다 아래쪽에 있다.

(ii) $x_1, x_2 \leq 0$인 경우. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이므로 곡선 $y = f(x)$가 y축에 대하여 대칭이다. 따라서 경우 (i)의 결과로부터 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분은 선분 PQ보다 아래쪽에 있다.

(iii) $x_1 < 0 < x_2$인 경우. 좌표평면의 원점을 O라 하면 $\mathrm{O} = (0, f(0))$이다. $f(x)$가 각각의 구간 $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$에서 아래로 볼록하므로 두 점 P, O 사이의 곡선 부분은 선분 PO보다 항상 아래쪽에 있으며, 마찬가지로 두 점 O, Q 사이의 곡선 부분은 선분 OQ보다 항상 아래쪽에 있다. 한편, $f(x_1) > 0$, $f(x_2) > 0$이므로 선분 PO와 OQ는 선분 PQ 아래쪽에 있다. 따라서, 두 점 P, Q 사이의 곡선 부분은 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있다.

(3) 함수 $S(a)$가 미분가능하지 않은 실수 a의 값을 모두 구하시오.

풀이: 문항(2)의 결과로부터 두 점 $(a, f(a))$, $(a+1, f(a+1))$을 잇는 선분은 항상 곡선 $y = f(x)$ 위쪽에 놓인다. 네 점 $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(a+1, f(a+1))$, $(a+1, 0)$을 꼭짓점으로 갖는 사다리꼴의 넓이는 $\dfrac{f(a) + f(a+1)}{2}$ 이므로

$$S(a) = \frac{f(a) + f(a+1)}{2} - \int_{a}^{a+1} f(x)dx$$

이다.

(i) ($a \geq 0$인 경우) 이때 $a < x < a+1$인 x에 대하여 $f(x) = xe^{x}$이므로

$$S(a) = \frac{ae^{a} + (a+1)e^{a+1}}{2} - \int_{a}^{a+1} xe^{x}dx$$

이다. 부분적분법에 의하여

$$\int_{a}^{a+1} xe^{x}dx = \left[(x-1)e^{x}\right]_{a}^{a+1} = ae^{a+1} - (a-1)e^{a}$$

이므로

$$S(a) = \frac{e^{a}((3-e)a + e - 2)}{2}$$

를 얻는다.

(ii) $(-1 < a < 0$인 경우) 이때 닫힌구간 $[a, a+1]$이 0을 포함하므로

$$S(a) = \frac{-ae^{-a} + (a+1)e^{a+1}}{2} + \int_a^0 xe^{-x}dx - \int_0^{a+1} xe^x dx$$

이다. 부분적분법을 사용하여 계산하면

$$S(a) = \frac{(a+2)e^{-a}}{2} + \frac{(1-a)e^{a+1}}{2} - 2$$

이다.

(iii) $(a \le -1$인 경우) 함수 $f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 대칭성에 의해 $S(a) = S(-a-1)$이다. 따라서

$$S(a) = \frac{e^{-a-1}((e-3)a + 2e - 5)}{2}$$

이다.

이제 미분가능성을 조사하자. $a > 0$에서

$$S'(a) = \frac{e^a((3-e)a+1)}{2}$$

이고, $-1 < a < 0$에서

$$S'(a) = -\frac{(a+1)e^{-a} + ae^{a+1}}{2}$$

이다. 대칭성에 의해 $a < -1$에서 $S'(a) = -S'(-a-1)$이다. 한편, 함수의 극한의 기본 성질을 이용하면

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0+} \frac{S(h)-S(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\left(\frac{e^h((3-e)h+e-2)}{2} - \frac{e-2}{2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0+}\left(\frac{3-e}{2}e^h + \frac{e-2}{2}\cdot\frac{e^h-1}{h}\right) \\
&= \frac{3-e}{2}\lim_{h\to 0+} e^h + \frac{e-2}{2}\lim_{h\to 0+}\frac{e^h-1}{h} \\
&= \frac{3-e}{2} + \frac{e-2}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0-} \frac{S(h)-S(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-} \frac{1}{h}\left(\frac{(h+2)e^{-h}}{2} + \frac{(1-h)e^{h+1}}{2} - 2 - \left(1 + \frac{e}{2} - 2\right)\right) \\
&= \lim_{h\to 0-}\left(\frac{e^{-h}}{2} - \frac{e^{h+1}}{2} + \frac{e^{-h}-1}{h} + \frac{e(e^h-1)}{2h}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \lim_{h\to 0-}\frac{e^{-h}-1}{h} + \frac{e}{2}\lim_{h\to 0-}\frac{e^h-1}{h} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{e}{2} - 1 + \frac{e}{2} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\lim_{h\to 0+} \frac{S(h)-S(0)}{h} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{h\to 0-} \frac{S(h)-S(0)}{h}$$

이고 $S'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)-S(0)}{h}$이 존재하지 않으므로 함수 $S(a)$는 $a = 0$에서 미분가능하지 않다.

$a \le -1$일 때 $S(a) = S(-a-1)$이므로 대칭성에 의해 함수 $S(a)$는 $a = -1$에서 미분가능하지 않다. 따라서 함수 $S(a)$가 미분가능하지 않은 실수 a는 $a = -1, 0$이다.

(4) 함수 $S(a)$의 최솟값을 구하시오.

풀이: 문항(3)의 풀이에 의하여 $a \ge 0$에서 $S'(a) = \frac{e^a((3-e)a+1)}{2}$이다. $e < 3$이므로 $a \ge 0$에서 $S'(a) > 0$이다. 따라서 함수 $S(a)$는 $a \ge 0$에서 증가한다. 그러므로 $a \ge 0$에서 함수 $S(a)$의 최솟값은 $S(0) = \frac{e-2}{2}$이다. 대칭성 $S(a) = S(-a-1)$에 의하여 함수 $S(a)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 $a = -1$일 때 최솟값을 가지며, 그 값은 $S(-1) = \frac{e-2}{2}$이다.

실수 a가 열린구간 $(-1, 0)$에 속할 때 문항 (1)의 풀이에 의하여

$$S'(a) = -\frac{(a+1)e^{-a} + ae^{a+1}}{2}$$

이다. 함수 $S(a)$의 이계도함수를 계산하면

$$S''(a) = \frac{ae^{-a} - (a+1)e^{a+1}}{2}$$

을 얻는다. $-1 < a < 0$일 때 $a < 0 < (a+1)e^{2a+1}$이므로 $ae^{-a} - (a+1)e^{a+1} < 0$을 만족한다. 그러므로 $-1 < a < 0$에서 $S''(a) < 0$이다. 따라서 도함수 $S'(a)$는 열린구간 $(-1, 0)$에서 감소한다. $S'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$이므로 함수 $S(a)$는 열린구간 $(-1, 0)$에서 $a = -\frac{1}{2}$일 때 극댓값을 갖는다. 또한, 구간 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$에서 증가하며 구간 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$에서 감소한다.

따라서 구하고자 하는 최솟값은 $\frac{e-2}{2}$이다.

(5) 방정식 $S(a) = c$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 c의 값을 모두 구하시오.

풀이: 문항(4)의 결과로부터, 함수 $S(a)$는 각각의 열린구간 $(-\infty, -1)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$에서 감소하고, 각각의 열린구간 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, \infty)$에서 증가한다. 또한, $a = -1, 0$에서 최솟값 $\frac{e-2}{2}$을 가지며 $a = -\frac{1}{2}$에서 극댓값

$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right)e^{-\left(-\frac{1}{2}\right)}}{2} + \frac{\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\right)+1}}{2} - 2 = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} - 2$$

를 갖는다. 그러므로 방정식 $S(a) = c$은 실수 c의 값이 오직 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{e} - 2$일 때 3개의 서로 다른 실근을 가진다. 따라서 구하고자 하는 실수 c는 $\frac{3}{2}\sqrt{e} - 2$이다.

[문항2] k쌍의 부부 $2k$명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음 물음에 답하시오.
(k는 2 이상의 자연수이고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [30점]
(1) 모든 부부가 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.
(2) 정확히 $(k-1)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.
(3) 정확히 $(k-2)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.
(4) 문항(2)에서 구한 경우의 수를 a_k라 할 때

$$0 < \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}3^{k+1}} < 1$$

을 만족하는 2 이상의 자연수 n을 모두 구하시오.

■ 출제 의도

이 문제는 원순열의 개념과 경우의 수의 덧셈원리, 곱셈원리를 이해하고, 부부가 이웃하여 앉는 조건을 하나의 단위로 묶어 처리하는 방법을 활용하여 경우의 수를 구하는 문제이다. 풀이 과정에서는 원탁에 앉는 배열의 회전 대칭성을 고려하여 원순열의 수를 계산하고, 조건을 만족하는 사람들을 하나의 단위로 생각하여 경우의 수를 체계적으로 계산하는 능력을 평가한다. 또한 정확히 특정 수의 부부만 이웃하는 경우를 구하는 과정에서 중복 계산된 경우를 적절히 제거하거나 보정하는 논리적 추론 능력과 계산 능력을 평가한다. 나아가 더불어서 수열의 일반항을 이용하여서 합을 구하는 능력과 주어진 범위를 판단하는 논증력을 평가한다.

(1) 모든 부부가 서로 이웃하여 앉는 상황에서 각 부부를 하나의 단위로 생각하여 원순열의 개념을 적용할 수 있는지를 평가한다. 또한 원탁 배열에서 회전에 의한 중복을 제거하여 경우의 수를 정확히 계산하는 능력과 각 부부 내부의 배열을 고려하는 계산 능력을 평가한다.

(2) 정확히 $(k-1)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 상황을 분석하여, 이웃하지 않는 부부를 선택한 뒤 나머지 부부를 하나의 단위로 처리하는 전략을 수립할 수 있는지를 평가한다. 또한 모든 부부가 이웃하는 경우를 적절히 제외하여 원하는 경우의 수를 구하는 논리적 추론 능력과 계산 능력을 평가한다.

(3) 정확히 $(k-2)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 상황에서, 조건을 만족하지 않는 경우를 체계적으로 분류하고 중복 계산된 경우를 보정하는 과정을 통해 경우의 수를 구하는 능력을 평가한다. 특히 경우를 나누어 계산한 뒤 중복된 경우를 한 번 보정하는 논리를 활용하여 복잡한 조건을 체계적으로 처리하는 수학적 사고력과 서술 능력을 평가한다.

(4) 앞 문항에서 구한 일반항 a_k를 활용하여 수열의 일반항을 변형하고 급수의 성질을 분석하는 능력을 평가한다. 또한 수열의 증가성과 급수의 부분합의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 n의 범위를 판단하는 추론 능력과 계산 능력을 평가한다.

■ 출제 근거

- 확률과 통계, 김원경 외, 비상교육: 경우의 수 (pp. 11-12)
- 수학(하), 김원경 외, 비상교육: 경우의 수 (pp. 243-246)
- 수학 Ⅰ, 김원경 외, 비상교육: 수열 (pp. 139-143)
- 확률과 통계, 류희찬 외, 천재교육: 원순열 (pp. 11-13)
- 수학 Ⅰ, 이준열 외, 천재교육: 수열 (pp. 146-152)

■ 예시 답안

(1) 모든 부부가 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.

풀이: 각 부부가 서로 이웃하게 앉아야 하므로 한 쌍의 부부를 하나의 묶음으로 생각하면 총 k개의 묶음이다. 이 k개의 묶음을 원탁 위에 배열하는 경우의 수는 $(k-1)!$가지이다. 또한 각 부부는 자리만 서로 바꾸어 앉을 수 있으므로 각 부부마다 2가지의 배열이 가능하다. 그러므로 구하는 경우의 수는 $(k-1)!\times 2^k$가지이다.

(2) 정확히 $(k-1)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.

풀이: k쌍의 부부들 중 먼저 서로 이웃하지 않는 부부를 선택하는 경우의 수는 ${}_kC_1$가지이다. 선택된 부부를 제외한 나머지 $(k-1)$쌍의 부부를 하나의 묶음으로 보고 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$라고 하자. 그리고 선택된 부부를 각각 B_1, B_2라고 하자. 그러면 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, B_1, B_2$를 원탁에 배열하는 경우의 수는 $k!$가지이다. 그리고 선택되지 않은 $(k-1)$쌍의 부부가 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 각 2가지의 배열이 가능하므로 총 $k!\,2^{k-1}$가지이다. 여기에서 B_1, B_2가 서로 이웃한 경우의 수는 문항 (1)에서 구한 $(k-1)!2^k$가지이다. 따라서 부부 B_1, B_2가 이웃하는 경우를 제외한 경우의 수는

$$k!\,2^{k-1}-(k-1)!\,2^k=(k-1)!(k-2)2^{k-1}$$

이다. 그러므로 구하는 경우의 수는

$${}_kC_1(k-1)!(k-2)2^{k-1}=k!(k-2)2^{k-1}$$

가지이다.

(3) 정확히 $(k-2)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.

풀이: k쌍의 부부들 중 먼저 서로 이웃하지 않는 부부를 선택하는 경우의 수는 ${}_kC_2$가지이다. 선택된 부부를 제외한 나머지 $(k-2)$쌍의 부부를 하나의 묶음으로 보고 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-2}$ 라고 하자. 그리고 선택된 두 부부를 각각 B_1, B_2 그리고 C_1, C_2라고 하자. 그러면 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-2}, B_1, B_2, C_1, C_2$를 원탁에 배열하는 경우의 수는 $(k+1)!$ 가지이다. 그리고 선택되지 않은 $(k-2)$쌍의 부부가 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 각 부부마다 2가지의 배열이 가능하므로 총 $(k+1)!\,2^{k-2}$가지이다.

여기에서 부부 B_1, B_2가 이웃하거나 부부 C_1, C_2가 이웃하는 경우의 수를 제외하자. 먼저 부부 B_1, B_2가 이웃하는 경우의 수는 문항 (2)에서 구한 $k!\,2^{k-1}$가지이고 마찬가지로 부부 C_1, C_2가 이웃하는 경우의 수 역시 $k!\,2^{k-1}$가지이다. 두 부부 B_1, B_2와 C_1, C_2가 모두 이웃하는 경우의 수는 문항 (1)에서 구한 $(k-1)!\times 2^k$가지이다. 따라서 부부 B_1, B_2가 이웃하거나 부부 C_1, C_2가 이웃하는 경우를 제외한 경우의 수는

$$(k+1)!\,2^{k-2}-(k!2^{k-1}+k!2^{k-1}-(k-1)!2^k)=(k-1)!(k^2-3k+4)2^{k-2}$$

가지이다. 그러므로 구하는 모든 경우의 수는

$${}_kC_2\times(k-1)!(k^2-3k+4)2^{k-2}=k!\,(k-1)(k^2-3k+4)2^{k-3}$$

가지이다.

(4) 문항(2)에서 구한 경우의 수를 a_k라 할 때

$$0 < \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}3^{k+1}} < 1$$

을 만족하는 2 이상의 자연수 n을 모두 구하시오.

풀이: 문항(2)의 결과에 따라 $a_k = k!(k-2)2^{k-1}$이므로

$$\frac{a_k}{2^{k-1}3^{k+1}} = \frac{k!\,(k-2)}{3^{k+1}} = \frac{(k+1)! - 3\times k!}{3^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{3^{k+1}} - \frac{k!}{3^k}$$

이 된다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대해서

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}3^{k+1}} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{(k+1)!}{3^{k+1}} - \frac{k!}{3^k} \right) = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} - \frac{2}{9}$$

이다.

$n \geq 2$일 때 $\frac{(n+2)!}{3^{n+2}} > \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$이므로 수열 $\frac{(n+1)!}{3^{n+1}} - \frac{2}{9}$은 증가 수열이다.

$n=2$일 때 $\frac{6}{27} - \frac{2}{9} = 0$이고, $n=5$일 때 $\frac{720}{729} - \frac{2}{9} = \frac{62}{81} < 1$이며, $n=6$일 때 $\frac{5040}{2187} - \frac{2}{9} = \frac{506}{243} > 1$이므로 구하는 자연수 n은 3,4,5이다.

[문항3] 좌표평면에 주어진 두 집합

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}=1\right\},\ B=\{(x,y)\,|\,|xy^k|=c\}$$

에 대하여 $n(A\cap B)=4$일 때 다음 물음에 답하시오.
(단, a,b,c는 양수이고 k는 자연수이다.) [30점]

(1) 주어진 $c>0$에 대하여 $k=1$일 때 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 a,b에 관계없이 일정함을 보이고, 이때 집합 A가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

(2) 자연수 k에 대하여 집합 A가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A\cap B$의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k라고 하자. 이때, h_k가 양수 a,b,c와 관계없이 일정함을 보이고 h_k를 k에 관한 식으로 나타내시오.

(3) 문항(2)의 h_k에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2h_{k+1}}$의 값을 구하시오.

■ 출제 의도

이 문제는 절댓값을 포함한 등식으로 정의된 집합이 나타내는 좌표평면 위의 도형이 좌표축에 대하여 대칭임을 이해하고, 도형의 성질을 관찰·유추하여 넓이의 불변성을 수리적으로 증명하며, 둘레의 길이의 최솟값을 구하고, 넓이의 비율로 정의된 급수의 합을 계산하는 종합 문제이다. 풀이 과정에서는 주어진 등식으로부터 적절한 함수를 설정하고 미분을 통해 접선의 방정식을 도출하여 이를 효율적으로 활용하는 능력, 둘레의 길이에 관한 식을 유추하고 최솟값을 구하는 수리적 사고력과 계산 능력, 그리고 문제 풀이를 위한 기획력을 평가한다. 아울러 급수의 합에 관한 개념적 이해와 계산 능력도 함께 평가한다.

(1) 좌표축에 대해 대칭인 두 도형의 개형을 이해하고, 주어진 교점 조건과 접선 조건 사이의 관계를 논리적으로 추론한다. 이를 바탕으로 접선의 방정식을 활용하여 넓이의 불변성을 유도하는 수리적 추론 능력, 계산 능력, 서술 능력을 평가한다. 나아가 둘레의 길이에 관한 식을 적절히 유추하고, 최솟값을 정확히 계산하는 능력을 함께 평가한다.

(2) 좌표축에 대해 대칭인 도형의 대칭성을 확인하고, 적절한 함수와 변수를 설정한 뒤 미분과 접선의 방정식을 활용하여 넓이의 비율을 도출하는 수리적 추론 능력과 계산 능력을 평가한다.

(3) 넓이의 비율로 정의된 수열을 이용하여 주어진 급수의 합을 올바르게 구하는 개념 이해력과 계산 능력을 평가한다.

■ 출제 근거

- 수학, 권오남 외, 교학사: 104-111, 116-119, 147-152, 163-166, 170, 198-200, 231-237
- 수학, 황선욱 외, 미래엔: 114-119, 125-127, 157-159, 175-177, 180-183, 204-205, 236-241
- 미적분, 박교식 외, 동아출판사: 29-32, 77-79, 101-103
- 미적분, 권오남 외, 교학사: 32-36, 82-85, 108-111

■ 예시 답안

(1) 주어진 $c>0$에 대하여 $k=1$일 때 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 a,b에 관계없이 일정함을 보이고, 이때 집합 A가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

풀이: 집합 A,B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭이므로 $k=1$일 때 양의 실수 a,b에 대하여 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 제1사분면에서 곡선 $y=\frac{c}{x}$에 접할 때 주어진 조건 $n(A\cap B)=4$을 만족한다.

곡선 $y=\frac{c}{x}$의 점 $\left(\alpha,\frac{c}{\alpha}\right)$ $(\alpha>0)$에서 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 접한다고 하면, $y=\frac{c}{x}$의 도함수가 $y'=-\frac{c}{x^2}$이므로 접선의 기울기는 $-\frac{c}{\alpha^2}$이고 접선의 방정식은

$$y-\frac{c}{\alpha}=\left(-\frac{c}{\alpha^2}\right)(x-\alpha)$$

이다. 이 접선과 x축과의 교점이 $(2\alpha,0)$이고 y축과의 교점이 $\left(0,\frac{2c}{\alpha}\right)$이므로 $a=2\alpha$이고 $b=\frac{2c}{\alpha}$이다.

집합 A가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a,2b$인 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(2a\cdot 2b)=2ab=2\left(2\alpha\cdot\frac{2c}{\alpha}\right)=8c$$

이다. 그러므로 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 a,b에 관계없이 일정하다.

집합 A가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a,2b$인 마름모이므로 둘레의 길이가 $4\sqrt{a^2+b^2}$이다. 주어진 조건 $n(A\cap B)=4$를 만족할 때 양의 실수 a,b가 $ab=4c$를 만족한다. $ab=4c$를 만족시키는 양의 실수 a,b에 대하여, 산술평균-기하평균의 부등식에 의해서

$$a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab=2\cdot 4c=8c$$

이므로 구하는 둘레의 길이 $4\sqrt{a^2+b^2}$의 최솟값은 $4\sqrt{8c}=8\sqrt{2c}$이다.

(2) 자연수 k에 대하여 집합 A가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A\cap B$의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k라고 하자. 이때, h_k가 양수 a,b,c와 관계없이 일정함을 보이고 h_k를 k에 관한 식으로 나타내시오.

풀이: 집합 A,B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭이므로 자연수 k와 양수 a,b에 대하여 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 제1사분면에서 곡선 $x=\frac{c}{y^k}$에 접할 때 주어진 조건 $n(A\cap B)=4$를 만족한다.

곡선 $x=\frac{c}{y^k}$위의 $\alpha>0$인 점 $\left(\frac{c}{\alpha^k},\alpha\right)$에서 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 접한다고 하면, $x=\frac{c}{y^k}$를 y의 함수로 보고 y에 대해서 미분하면 $x'=-\frac{ck}{y^{k+1}}$이므로 접선의 기울기는 $-\frac{ck}{\alpha^{k+1}}$이고 접선의 방정식은

$$x-\frac{c}{\alpha^k}=\left(-\frac{ck}{\alpha^{k+1}}\right)(y-\alpha)$$

이다. 이 접선과 x축과의 교점이 $\left(\frac{c(k+1)}{\alpha^k},0\right)$이고 y축과의 교점이 $\left(0,\frac{k+1}{k}\alpha\right)$이므로 $a=\frac{c(k+1)}{\alpha^k}$

이고 $b=\frac{k+1}{k}\alpha$이다.

집합 A가 나타내는 도형이 대각선의 길이가 각각 $2a, 2b$인 마름모이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2}(2a\cdot 2b)=2ab=2\left(\frac{c(k+1)}{\alpha^k}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\alpha\right)\right)=2c\frac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}$$

이다. 집합 A, B가 나타내는 도형들이 모두 x축과 y축에 대하여 대칭이므로

$$A\cap B=\left\{\left(\frac{c}{\alpha^k},\alpha\right),\left(\frac{c}{\alpha^k},-\alpha\right),\left(-\frac{c}{\alpha^k},\alpha\right),\left(-\frac{c}{\alpha^k},-\alpha\right)\right\}$$

이다. 이들을 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형이므로 이 직사각형의 넓이는

$$4\left(\frac{c}{\alpha^k}\cdot\alpha\right)=\frac{4c}{\alpha^{k-1}}$$

이다. 따라서

$$h_k=\left(2c\frac{(k+1)^2}{k\alpha^{k-1}}\right)\cdot\left(\frac{4c}{\alpha^{k-1}}\right)^{-1}=\frac{(k+1)^2}{2k}$$

이므로 h_k는 양수 a, b, c와 관계없이 일정하다.

(3) 문항(2)의 h_k에 대하여 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2h_{k+1}}$의 값을 구하시오.

풀이: 문항(2)의 결과에 따라

$$h_k=\frac{(k+1)^2}{2k}$$

이다. 그러므로

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2h_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k^2h_{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8(k+1)}{k^2(k+2)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{5}{2}$$

이다.