2027학년도 수시 모의논술고사

논술고사 문제지 (자연계열 II)

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

이 화 여 자 대 학 교

1 함수 $f(x)=|x|e^{|x|}$와 실수 a에 대하여 두 점 $(a, f(a))$, $(a+1, f(a+1))$을 잇는 선분과 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(a)$라 할 때, 아래 물음에 답하시오. **[40점]**

(1) 곡선 $y=f(x)$는 각각의 구간 $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$에서 아래로 볼록함을 보이시오.

(2) $x_1 < x_2$인 실수 x_1, x_2에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}=(x_1, f(x_1))$, $\mathrm{Q}=(x_2, f(x_2))$ 사이의 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있음을 보이시오.

(3) 함수 $S(a)$가 미분가능하지 않은 실수 a의 값을 모두 구하시오.

(4) 함수 $S(a)$의 최솟값을 구하시오.

(5) 방정식 $S(a)=c$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 c의 값을 모두 구하시오.

2 k쌍의 부부 $2k$명이 원탁에 둘러앉을 때, 다음 물음에 답하시오.(k는 2 이상의 자연수이고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) **[30점]**

(1) 모든 부부가 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.

(2) 정확히 $(k-1)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.

(3) 정확히 $(k-2)$쌍의 부부만 서로 이웃하여 앉는 모든 경우의 수를 구하시오.

(4) 문항(2)에서 구한 경우의 수를 a_k라 할 때

$$0 < \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{2^{k-1}3^{k+1}} < 1$$

을 만족하는 2 이상의 자연수 n을 모두 구하시오.

3 좌표평면에 주어진 두 집합

$$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}=1\right\},\ B=\{(x,y)\,|\,|xy^k|=c\}$$

에 대하여 $n(A\cap B)=4$일 때 다음 물음에 답하시오.(단, a,b,c는 양수이고 k는 자연수이다.) **[30점]**

(1) 주어진 $c>0$에 대하여 $k=1$일 때 집합 A가 나타내는 도형의 넓이가 a,b에 관계없이 일정함을 보이고, 이때 집합 A가 나타내는 도형의 둘레의 길이의 최솟값을 구하시오.

(2) 자연수 k에 대하여 집합 A가 나타내는 도형의 넓이를 집합 $A\cap B$의 원소들을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이로 나눈 값을 h_k라고 하자. 이때, h_k가 양수 a,b,c와 관계없이 일정함을 보이고 h_k를 k에 관한 식으로 나타내시오.

(3) 문항(2)의 h_k에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2h_{k+1}}$의 값을 구하시오.