단국대학교 2027학년도 모의논술고사

자연 계열 가이드 답안

단국대학교

문제 1

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고 있는지를 평가

〔논제 2〕 정적분을 활용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있는지를 평가

〔논제 3〕 함수의 극값과 도함수의 성질을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 김원경 외(2024), 수학II, 비상교육, 18-22, 82-85쪽
○ 황선욱 외(2024), 수학II, 미래엔, 18-22, 85-88쪽
○ 이준열 외(2024), 수학II, 천재교육, 83-89쪽
○ 김원경 외(2024), 미적분, 비상교육, 147-149쪽
○ 황선욱 외(2024), 미적분, 미래엔, 166-167쪽

□ 문항해설

〔논제 1〕 함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

〔논제 2〕 정적분을 활용하여 곡선과 접선이 만드는 도형의 넓이를 구하는 문제이다.

〔논제 3〕 도함수의 성질을 이용하여 함수가 최솟값을 가질 조건을 찾는 문제이다.

□ 예시 답안

〔논제 1〕 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(\beta x)}{(2x)^{\alpha}}=\gamma\neq 0$ 에서 분자가 3차식이므로 분모도 3차식. 따라서 $\alpha=3$

마찬가지로 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(-x)f(\alpha x)}{x^{\beta}}=\gamma\neq 0$ 에서 분자가 6차식이므로 $\beta=6$. $\gamma=\lim_{x\to\infty}\frac{f(6x)}{(2x)^3}=-27$

〔논제 2〕 $f'(-3)=-9$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선 $y=\ell(x)$는

$$y=-9(x+3)+f(-3)=-9x-27$$

직선 $y=\ell(x)$와 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 $-x^3-3x^2=-9x-27$에서 $x=-3,\ x=3$

모든 $x\in[-3,3]$에 대하여 $f(x)-\ell(x)=-x^3-3x^2+9x+27=-(x+3)^2(x-3)\geq 0$ 이므로

$$S=\int_{-3}^{3}\{f(x)-\ell(x)\}dx=\int_{-3}^{3}\{f(x)-p\}dx$$

따라서 $\int_{-3}^{3}(-p)dx=\int_{-3}^{3}(9x+27)dx=\int_{-3}^{3}27\,dx$ 에서 $p=-27$

〔논제 3〕 점 Q$(a,\ f(a))$를 지나고 기울기 $m(m>0)$인 직선의 방정식은 $y-f(a)=m(x-a)$ 이고 이 직선이 x축, y축과 만나는 점은 각각 A$\left(a-\frac{f(a)}{m},\ 0\right)$, B$(0,\ f(a)-am)$. 따라서

$$\{g(m)\}^2=\left\{a-\frac{f(a)}{m}\right\}^2+\{f(a)-am\}^2$$

$h(m)=\{g(m)\}^2$은 $m=2$ 에서 최소이므로 제시문 (다)에 의하여 $h'(2)=0$

$$h'(m)=2\left\{a-\frac{f(a)}{m}\right\}\frac{f(a)}{m^2}-2a\{f(a)-am\}=2\{am-f(a)\}\left\{\frac{f(a)}{m^3}+a\right\}\ \cdots\cdots\ (*)$$

이므로

$$0=h'(2)=\frac{1}{4}\{2a-f(a)\}\{f(a)+8a\}=\frac{a^2}{4}(2+a^2+3a)(-a^2-3a+8)$$

$a>0$ 이므로 $a=\frac{-3+\sqrt{41}}{2}$

※ $(*)$로부터 방정식 $h'(m)=0$을 만족시키는 양수 m은 $\sqrt[3]{\frac{f(a)}{-a}}$ 뿐이고 $\lim_{m\to 0+}g(m)=\infty=\lim_{m\to\infty}g(m)$ 이므로 $g(2)$는 $g(m)$의 최솟값이다.

문제 2

예시 답안의 내용 및 평가 기준의 내용과는 일치하지 않더라도 기술한 내용이 논리적으로 타당한 경우에는 평가위원의 판단에 따라 부분 점수를 부여할 수 있음.

□ 출제의도

〔논제 1〕 함수의 개념을 이해하고 있는지를 평가

〔논제 2〕 일대일대응의 개념을 이해하고 있는지를 평가

□ 자료출처

○ 이준열 외(2024), 수학, 천재교육, 117, 133-135, 223-226쪽
○ 김원경 외(2024), 수학, 비상교육, 107, 120-122, 203-208쪽
○ 김원경 외(2024), 수학 Ⅰ, 비상교육, 127-130쪽
○ 황선욱 외(2024), 수학 Ⅰ, 미래엔, 130-133쪽

□ 문항해설

〔논제 1〕 함수의 개념을 이용하여 크기순으로 나열하는 문제이다.

〔논제 2〕 주어진 문제 상황에서 일대일대응인 함수를 찾는 문제이다.

□ 예시 답안

〔논제 1〕 $\sum_{n=1}^{6} a_n b_n$의 값이 최대라고 하자. 만약 $i<j$일 때 $a_i > a_j$ 인 a_i와 a_j가 있으면

$\sum_{n=1}^{6} a_n b_n$ 중의 두 항 $a_i b_i$, $a_j b_j$를 각각 $a_i b_j$, $a_j b_i$로 바꾸었을 때 합의 변화량은

$$(a_i b_j + a_j b_i) - (a_i b_i + a_j b_j) = (a_i - a_j)(b_j - b_i) > 0$$

이므로 $a_i b_j + a_j b_i > a_i b_i + a_j b_j$ 가 되어 $\sum_{n=1}^{6} a_n b_n$의 값이 최대가 아니다. 따라서 $\sum_{n=1}^{6} a_n b_n$의 값이 최대가 되기 위해서는 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ 이어야 한다. 그러므로

① $k<-1$ 인 경우 : $k^5 < k^3 < k < k^2 < k^4 < k^6$ 이므로

$$f(1)=5,\ f(2)=3,\ f(3)=1,\ f(4)=2,\ f(5)=4,\ f(6)=6$$

② $-1<k<0$ 인 경우 : $k < k^3 < k^5 < k^6 < k^4 < k^2$ 이므로

$$f(1)=1,\ f(2)=3,\ f(3)=5,\ f(4)=6,\ f(5)=4,\ f(6)=2$$

〔논제 2〕 제시문 (다)에 의하여 무게중심은 $G_n\left(\frac{2n+1+2^{f(n)}}{3}, n+1\right)$ 이고, G_n과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리 d는

$$d=\frac{\left|2n+1+2^{f(n)}+4n+4\right|}{5}=\frac{n+2^{f(n)}}{5}+n+1$$

따라서 d가 자연수이려면 $n+2^{f(n)}$이 5의 배수이어야 한다.

$2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, $2^6=64$ 이므로 각 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ 에 대하여 $n+2^{f(n)}$ 이 5의 배수인 $f(n)$은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6
$n+2^{f(n)}$이 5의 배수인 $f(n)$	2, 6	3	1, 5	4	없음	2, 6

따라서 구하는 함수 $f(n)$은

① $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=4$, $f(5)=5$, $f(6)=6$

② $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=4$, $f(5)=1$, $f(6)=6$

③ $f(1)=6$, $f(2)=3$, $f(3)=1$, $f(4)=4$, $f(5)=5$, $f(6)=2$

④ $f(1)=6$, $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=4$, $f(5)=1$, $f(6)=2$


DKU
단국대학교