II

2027학년도 가톨릭대학교
자연공학계열 및 간호학과 모의논술

문항 · 1 제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 함수 $f(x)$는 다음과 같다

$$f(x)=\frac{(x+1)(x^2-4)}{e^x}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$의 두 극댓값의 곱을 A라고 하자.

(ㄷ) 닫힌구간 [1, 2026]에서 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(x)$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 하자.

논제 1 (20점) 제시문 (ㄴ)의 A의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2 (10점) 제시문 (ㄷ)의 m과 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 · 2

제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (30점)

(ㄱ) 최고차항의 계수가 1보다 큰 자연수인 이차함수 $f(x)$와 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(f(x))=4$를 만족시키는 서로 다른 실수 x는 2개이고 그 합은 6이다.
>
> (나) $g(g(x))=4$를 만족시키는 서로 다른 실수 x는 4개이고 그 합은 6이다.
>
> (다) $g(2)=-2$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)=2^x$에 대하여 $g(h(x))=2$를 만족시키는 서로 다른 실수 x는 1개이다.

논제 1 (10점) 제시문 (ㄱ)의 이차함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표를 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2 (20점) 제시문 (ㄴ)의 이차함수 $g(x)$를 구하고 그 근거를 논술하시오.

문항 · 3 제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 문제(논제 1, 논제 2)에 답하시오. (40점)

(ㄱ) 삼각형 ABC는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 외접원의 지름의 길이는 25이다.
>
> (나) $\sin A = 2\sin B\cos C$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 삼각형 ABC와 점 D가 다음 조건을 만족시킬 때, 각 $\angle ACD$의 크기를 θ라 하고, 선분 CD의 길이를 l이라고 하자.

> (가) 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있는 서로 다른 네 점이다.
>
> (나) 두 직선 AD와 BC는 서로 수직이다.
>
> (다) 두 직선 AD와 BC가 만나는 점을 M이라고 할 때,
>
> 선분 BM의 길이는 12이다.

논제 1 (20점) 제시문 (ㄴ)의 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

논제 2 (20점) 제시문 (ㄴ)의 l이 가질 수 있는 값을 모두 구하고 그 근거를 논술하시오.

자연공학계열 및 간호(자연)

출제원칙

1. 출제 방침

(1) 고교 교과서에 기반한 고교 과정 내의 문제를 출제한다.

(2) 제시문에 대한 독해력과 분석력, 제시문을 바탕으로 제시된 문제를 해결하는 사고력과 적용하는 능력, 생각하는 바를 논리적으로 전개하는 논술능력을 측정하는 문제를 출제한다.

2. 출제 유형

(1) 지문제시형 문제를 출제한다.

(2) 제시문은 고교 교과서(“수학”, “수학 I”, “수학 II”, “미적분”)를 참조하여 구성한다.

(3) 수리논술 문제는 지문에 대한 정확한 독해력, 내용의 분석 능력, 제시된 지식을 이용하여 문제를 해결하는 능력 등을 측정하는 문제를 출제한다. 점수는 100점이며 변별력을 위해 3개의 문항으로 구성하되, 각 문항은 몇 개의 소 논제로 구성한다.

(4) 약 90분 이내에 작성하도록 한다.

3. 출제 의도

(1) [문항 1] 고교 교과서 “미적분”에 나오는 개념을 이해하는지를 평가할 수 있도록 문제를 제시하였다. 지수함수와 로그함수의 관계를 이해하고 이를 활용하여 함수의 적분을 계산할 수 있는지 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 2] 수능형 문제를 통해 수학능력을 확인할 수 있도록 문제를 제시하였다. 이차함수의 그래프를 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

[문항 3] 창의적인 사고를 확인하기 위한 문제를 제시하였다. 삼각형과 외접원의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는지를 평가할 수 있도록 하였다.

(2) 궁극적으로 고등학교 수학 문제 제시를 통해 대학 진학 후 이과과목을 수강할 수 있을 정도의 기초적인 능력을 갖추고 있는지를 측정하고자 하였다.

채점기준

1. 기본 사항

(1) 각 논제를 각각 가중치를 가지고 채점하되 총점으로 환산하여 총괄 평가.
수리논술에서는 **배당된 점수 범위 내에서 등급이 아닌 점수로 표기하여 합산함**.

(2) 채점위원 2인이 1조가 되어 한 답안지를 1차와 2차로 나누어 채점하고, 1차 채점의 결과가 만점의 25% 이상의 차이가 날 경우 채점위원이 공동 합의로 2차 채점을 진행하고, 2차 채점에서 위원간의 조정이 이루어지지 않을 경우 3차 채점을 실시한다. 3차 채점은 출제위원을 포함한 새로운 채점위원 2인이 채점하되 1차 채점의 상위와 하위 점수 사이의 점수를 부여한다.

(3) 논술 답안에 수험생의 신원을 알릴만한 요소가 있을 때는 다음과 같이 처리한다.
① 이름이 본문 내용과 별도로 표기된 경우 : 내용, 형식 모두 0점으로 채점
② 이름이 본문 중에 자연스럽게 노출된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점
③ 제목이 표기된 경우 : 형식 부분에서 5점 감점
④ 기타 의도적으로 수험생의 신원을 알리는 기호로 판단되는 요소가 있는 경우 : 사안의 경중에 따라 형식 부분에서 5점 이상 감점

2. 세부 사항

(1) 문제의 의도에서 완전히 이탈했거나 각 논제와 전혀 다른 내용을 서술한 경우는 0점으로 채점한다.
(2) 각 문항 별 채점 기준은 다음과 같다.

문항 · 1 (30점)

논제 1 (20점)

함수 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x^2-4)}{e^x}$의 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=-\dfrac{x(x^2-2x-6)}{e^x}$이므로

방정식 $x^2-2x-6=0$의 두 근을 $\alpha=1-\sqrt{7}, \beta=1+\sqrt{7}$라 할 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	α	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	$f(\beta)$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=\alpha, x=\beta$에서 극댓값을 가진다.

10점

그러므로 $A=f(\alpha)f(\beta)=\dfrac{(\alpha+1)(\alpha^2-4)(\beta+1)(\beta^2-4)}{e^{\alpha+\beta}}$이다.

$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-6$이므로

$A=\dfrac{(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4)(\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4)}{e^2}=\dfrac{(-3)\times(-6)\times 2}{e^2}=\dfrac{36}{e^2}$

이다.

10점

논제 2 (10점)

열린구간 $(1, 2026)$에서 유일한 극값은 $f(\beta)$이고

$f(1)=-\dfrac{6}{e}<0,\ 0<f(2026)<f(\beta)$ 이므로

5점

$m=f(1)=-\dfrac{6}{e},\ M=f(\beta)=\dfrac{22+8\sqrt{7}}{e^{1+\sqrt{7}}}$이다.

5점

문항 · 2 (30점)

논제 1 (10점)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축을 $x=h$라고 하면 꼭짓점의 x좌표는 h이다.

이 때, 실수 c에 대하여 방정식 $f(x)=c$가 서로 다른 두 실근을 가지면 두 실근의 합은 $2h$이다.

$f(x)=t$라고 할 때,

1) 만일 $f(t)=4$가 서로 다른 두 근 $t=t_1, t_2$ $(t_1<t_2)$를 갖는다면,

$f(f(x))=4$를 만족하는 서로 다른 실수 x가 2개이고 이차항의 계수가 양수이므로,

$f(x)=t_1$은 근이 없고 $f(x)=t_2$는 두 개의 서로 다른 실근을 가져야 한다.

이 두 실근은 $f(f(x))=4$를 만족시키고 두 근의 합은 $2h$이다. $2h=6$에서 $h=3$이다.

5점

2) $f(t)=4$가 중근 t_0를 갖는 경우, $f(x)=t_0$를 만족시키는 두 실근의 합이 $2h$이므로 $h=3$이다.

이 때, 꼭짓점의 좌표는 $(3,4)$이고 $f(x)$의 최솟값은 4이므로 $t_0=3$이다. 이차항의 계수가 양수이므로 $f(x)=t_0$은 실근을 갖지 않고, 이 경우는 불가능하다.

따라서 $h=3$이고, 구하고자 하는 이차함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 3이다.

5점

논제 2 (20점)

이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축을 $x=k$라고 하면 꼭짓점의 x좌표는 k이고,

실수 c에 대하여 방정식 $g(x)=c$가 서로 다른 두 실근을 가지면 두 실근의 합은 $2k$이다.

논제 1과 마찬가지로 $g(x)=t$라고 하면 $g(t)=4$는 서로 다른 두 근 $t=t_1$, t_2을 가져야 하고,

$g(x)=t_1$과 $g(x)=t_2$ 또한 서로 다른 실근을 두 개씩 가져야 하며, 이 네 실근은 모두

$g(g(x))=4$을 만족시킨다. 이때 두 실근의 합이 각각 $2k$이므로 네 실근의 합은 $4k$가 된다.

$4k=6$에서 $k=\frac{3}{2}$이다.

10점

따라서 $g(x)=a(x-\frac{3}{2})^2+b$로 나타낼 수 있고, $g(2)=-2$이므로 $b=-2-\frac{a}{4}$이다.

임의의 실수 x에 대해 $h(x)=2^x>0$이므로, $g(h(x))=2$가 하나의 근만 갖기 위해서는

두 근 중 하나는 양수이고 다른 하나는 0이하여야 한다.

방정식 $g(x)-2=a(x-\frac{3}{2})^2-4-\frac{a}{4}=0$의 근은 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{a}+\frac{1}{4}}$ 이고, $a=2$일 때는

하나의 양의 실근, a가 3이상인 자연수일 때는 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖는다.

따라서 $a=2$이고 $g(x)=2x^2-6x+2$이다.

10점

문항 · 3 (40점)

논제 1 (20점)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하면 $2R=25$이다.

사인법칙과 코사인법칙인 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$를 적용하면

제시문 (ㄱ)의 (나) $\sin A=2\sin B\cos C$ 조건에 의해 $\frac{a}{2R}=\frac{2b}{2R}\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$,

즉 $b=c$임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

10점

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 점 D는 삼각형 ABC의 외접원 위에 있다. 선분 BC의

수직이등분선이 점 A를 지나므로, 직선 AD가 선분 BC의 수직이등분선으로써 외접원의 중심을

지난다. 따라서 선분 AD가 외접원의 지름이고, 삼각형 ACD는 각 ∠ACD가 직각인 삼각형이다.

$\angle ACD=\theta=\frac{\pi}{2}$이고, $\cos\theta=0$이다.

10점

논제 2 (20점)

직선 AD가 선분 BC의 수직이등분선이므로 교점 M은 선분 BC의 중점이고 $\overline{CM}=\overline{BM}=12$이다.

삼각형 ACD는 각 ∠ACD가 직각인 삼각형이고, 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발이 점 M이다.

따라서 $\overline{DM}=x$라고 하면 직각삼각형의 성질에 의해 $x^2+12^2=l^2$이고

$25-x:12=12:x$를 얻는다.

10점

이를 정리하면 $x^2-25x+144=0$이므로 x는 9또는 16이다. 따라서 l의 값은 15 또는 20이다.

10점

예시답안

문항 · 1 (30점)

논제 1

함수 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x^2-4)}{e^x}$의 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=-\dfrac{x(x^2-2x-6)}{e^x}$이므로

방정식 $x^2-2x-6=0$의 두 근을 $\alpha=1-\sqrt{7}, \beta=1+\sqrt{7}$라 할 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 아래와 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	α	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↘	-4	↗	0	↗	$f(\beta)$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값, $x=\alpha, x=\beta$에서 극댓값을 가진다.

그러므로 $A=f(\alpha)f(\beta)=\dfrac{(\alpha+1)(\alpha^2-4)(\beta+1)(\beta^2-4)}{e^{\alpha+\beta}}$이다.

$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-6$이므로

$A=\dfrac{(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4)(\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4)}{e^2}=\dfrac{(-3)\times(-6)\times 2}{e^2}=\dfrac{36}{e^2}$ 이다.

논제 2

열린구간 $(1,\ 2026)$에서 유일한 극값은 $f(\beta)$이고

$f(1)=-\dfrac{6}{e}<0,\ \ 0<f(2026)<f(\beta)$ 이므로

$m=f(1)=-\dfrac{6}{e},\ \ M=f(\beta)=\dfrac{22+8\sqrt{7}}{e^{1+\sqrt{7}}}$이다.

문항 · 2 (30점)

논제 1

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축을 $x=h$라고 하면 꼭짓점의 x좌표는 h이다.

이 때, 실수 c에 대하여 방정식 $f(x)=c$가 서로 다른 두 실근을 가지면 두 실근의 합은 $2h$이다.

$f(x)=t$라고 할 때,

1) 만일 $f(t)=4$가 서로 다른 두 근 $t=t_1, t_2$ $(t_1<t_2)$를 갖는다면,

$f(f(x))=4$를 만족하는 서로 다른 실수 x가 2개이고 이차항의 계수가 양수이므로,

$f(x)=t_1$은 근이 없고 $f(x)=t_2$는 두 개의 서로 다른 실근을 가져야 한다.

이 두 실근은 $f(f(x))=4$를 만족시키고 두 근의 합은 $2h$이다. $2h=6$에서 $h=3$이다.

2) $f(t)=4$가 중근 t_0를 갖는 경우, $f(x)=t_0$를 만족시키는 두 실근의 합이 $2h$이므로 $h=3$이다.

이 때, 꼭짓점의 좌표는 $(3,4)$이고 $f(x)$의 최솟값은 4이므로 $t_0=3$이다.

이차항의 계수가 양수이므로 $f(x)=t_0$은 실근을 갖지 않고, 이 경우는 불가능하다.

따라서 $h=3$이고, 구하고자 하는 이차함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표는 3이다.

논제 2

이차함수 $y=g(x)$의 그래프의 대칭축을 $x=k$라고 하면 꼭짓점의 x좌표는 k이고,

실수 c에 대하여 방정식 $g(x)=c$가 서로 다른 두 실근을 가지면 두 실근의 합은 $2k$이다.

논제 1과 마찬가지로 $g(x)=t$라고 하면 $g(t)=4$는 서로 다른 두 근 $t=t_1, t_2$을 가져야 하고,

$g(x)=t_1$과 $g(x)=t_2$ 또한 서로 다른 실근을 두 개씩 가져야 하며, 이 네 실근은 모두

$g(g(x))=4$을 만족시킨다. 이때 두 실근의 합이 각각 $2k$이므로 네 실근의 합은 $4k$가 된다.

$4k=6$에서 $k=\frac{3}{2}$이다.

따라서 $g(x)=a(x-\frac{3}{2})^2+b$로 나타낼 수 있고, $g(2)=-2$이므로 $b=-2-\frac{a}{4}$이다.

임의의 실수 x에 대해 $h(x)=2^x>0$이므로, $g(h(x))=2$가 하나의 근만 갖기 위해서는

두 근 중 하나는 양수이고 다른 하나는 0이하여야 한다.

방정식 $g(x)-2=a(x-\frac{3}{2})^2-4-\frac{a}{4}=0$의 근은 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{4}{a}+\frac{1}{4}}$ 이고, $a=2$일 때는

하나의 양의 실근, a가 3이상인 자연수일 때는 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖는다.

따라서 $a=2$이고 $g(x)=2x^2-6x+2$이다.

문항 · 3 (40점)

논제 1

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하면 $2R=25$이다.

사인법칙과 코사인법칙인 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$를 적용하면

제시문 (ㄱ)의 (나) $\sin A=2\sin B\cos C$ 조건에 의해 $\frac{a}{2R}=\frac{2b}{2R}\frac{(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$,

즉 $b=c$임을 알 수 있다. 따라서 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있으므로 점 D는 삼각형 ABC의 외접원 위에 있다.

선분 BC의 수직이등분선이 점 A를 지나므로, 직선 AD가 선분 BC의 수직이등분선으로써 외접원의 중심을 지난다.

따라서 선분 AD가 외접원의 지름이고, 삼각형 ACD는 각 ∠ACD가 직각인 삼각형이다.

∠ACD $=\theta=\frac{\pi}{2}$이고, $\cos\theta=0$이다.

논제 2

직선 AD가 선분 BC의 수직이등분선이므로 교점 M은 선분 BC의 중점이고 $\overline{CM}=\overline{BM}=12$이다.

삼각형 ACD는 각 ∠ACD가 직각인 삼각형이고, 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발이 점 M이다.

따라서 $\overline{DM}=x$라고 하면 직각삼각형의 성질에 의해 $x^2+12^2=l^2$이고 $25-x:12=12:x$를 얻는다.

이를 정리하면 $x^2-25x+144=0$이므로 x는 9또는 16이다. 따라서 l의 값은 15 또는 20이다.