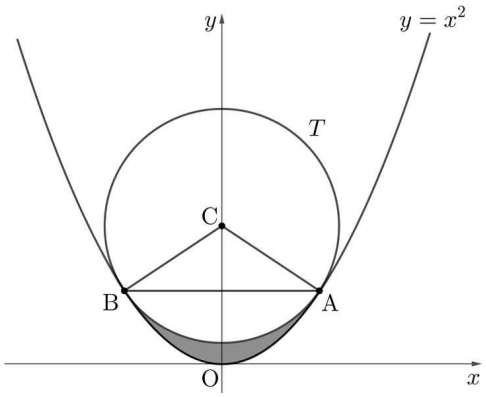
1. 문항 및 제시문

제시문 2-1

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

(나) 그림에서 곡선 $y=x^2$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(t,t^2)$, $\mathrm{B}(-t,t^2)$가 있다. 원 T는 y축 위의 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지난다. 점 A에서 원 T의 접선과 곡선 $y=x^2$의 접선이 같다. (단, $t>0$)



[문제 2-1] (13점)

(나)에서 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{4}$일 때, 다음을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

(1) 점 A의 좌표

(2) 원 T와 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이

제시문 2-2

(가) 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수는

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad (\text{단, } 0 \le r \le n) $$

(나) 집합 $X = \{1, 2, 3\}$이고 집합 $Y = \{y \mid y$는 n 이하의 자연수$\}$이다. (단, n은 7 이상의 자연수)

- X에서 Y로의 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 함수는 p개이다.

  X의 임의의 원소 a에 대하여 $f(a) > 2a$

- X에서 Y로의 함수 g 중 다음 조건을 만족시키는 함수는 q개이다.

  X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 $a < b$이면 $g(a) < g(b)$

[문제 2-2] (17점)

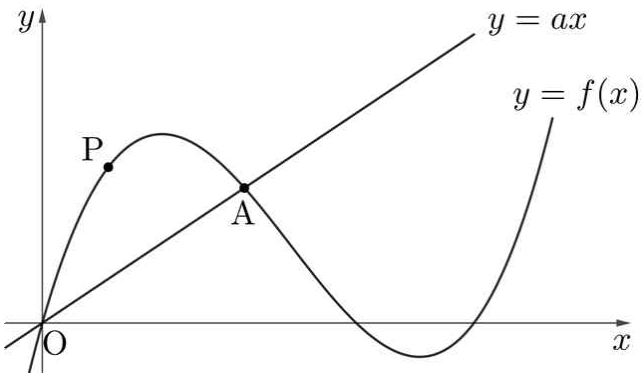
(1) (나)에서 $n = 7$일 때 $p - q$의 값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

(2) (나)에서 $p - q > 0$이 성립하도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

제시문 2-3

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(나) 그림은 직선 $y=ax\ (a>0)$와 최고차항의 계수가 양수 b인 삼차함수 $f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 근을 갖는데, 한 근은 0이고, 다른 두 근은 3보다 크다. 점 $\mathrm{A}(3,3a)$와 점 $\mathrm{P}(t,f(t))$는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. (단, $0<t<3$)



[문제 2-3] (20점)

(나)에서 $a=4$, $b=1$ 이라고 하자. 삼각형 OAP의 넓이가 $t=\frac{4}{3}$에서 최대가 될 때, 방정식 $f(x)=0$의 0이 아닌 두 근을 모두 구하고 풀이과정을 쓰시오.

2. 문항 해설

[문제 2-1] 접선의 방정식을 미분을 이용하여 구하고, 이를 이용하여 접점의 좌표를 구한다. 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.

[문제 2-2] 함수의 정의를 이해하고, 주어진 조건을 만족하는 함수의 개수를 곱의 법칙 및 조합의 수를 이용하여 구할 수 있다.

[문제 2-3] 주어진 조건을 만족시키는 삼차방정식을 미지의 계수를 포함한 형태로 나타낸다. 미분계수를 이용하여 삼차방정식의 계수를 정하고, 방정식의 해를 구할 수 있다.

3. 예시 답안 혹은 정답 ※ *선다형의 경우 정답만 기입*

[문제 2-1]

(답) (1) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ (2) $\frac{5}{12}-\frac{\pi}{8}$

(풀이)

(1) C의 좌표를 $(0,c)$라 하면 선분 AB의 길이는 $2t$이고 C에서 선분 AB에 이르는 거리는 $|c-t^2|$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{4}$이므로 $\frac{1}{2}\times 2t\times|c-t^2|=\frac{1}{4}$에서 $c=t^2\pm\frac{1}{4t}$이다.

$c=t^2-\frac{1}{4t}$이면 원 T가 곡선에 접할 수 없으므로 $c=t^2+\frac{1}{4t}$이고 C의 좌표는 $\left(0,t^2+\frac{1}{4t}\right)$이다.

점 A에서 $y=x^2$에 접하는 직선은 $y=2tx-t^2$이다. 점 C에서 이 직선까지의 거리가 원 T의 반지름인 선분 AC의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{\left|t^2+\frac{1}{4t}+t^2\right|}{\sqrt{1+4t^2}}=\sqrt{t^2+\frac{1}{16t^2}}$$

이를 풀면, $t^2-t+\frac{1}{4}=0$ 이므로, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$이다.

(2) 곡선 $y=x^2$과 직선 AC, 그리고 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하고, 원 T의 내부를 선분 AC와 선분 CO로 잘라서 만들어지는 부채꼴 중 작은 것의 넓이를 S_2라 하면 구하는 넓이는 $2(S_1-S_2)$이다.

직선 AC의 방정식이 $y=-x+\frac{3}{4}$이므로 $S_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-x^2-x+\frac{3}{4}\right)dx=\frac{5}{24}$이다.

S_2는 반지름이 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 중심각이 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴의 넓이이므로 $S_2=\frac{\pi}{16}$이다.

구하는 도형의 넓이는 $2(S_1-S_2)=2\left(\frac{5}{24}-\frac{\pi}{16}\right)=\frac{5}{12}-\frac{\pi}{8}$ 이다.

[문제 2-2]
(답) (1) -20 (2) 9

(풀이)
(1) $f(a) > 2a$인 함수 f의 개수는 다음처럼 계산하면 된다.
$f(1) > 2$이어야 하므로 $f(1)$은 3, 4, 5, 6, 7의 5가지가 가능하다.
$f(2) > 4$이어야 하므로 $f(2)$는 5, 6, 7의 3가지가 가능하다.
$f(3) > 6$이어야 하므로 $f(3)$은 7의 1가지가 가능하다.
따라서 $p = 5 \times 3 \times 1 = 15$.

$a < b$이면 $f(a) < f(b)$인 함수 f를 만들려면 $1, 2, \cdots, n$에서 서로 다른 세 개의 숫자를 골라서 크기 순서로 $f(1), f(2), f(3)$으로 두면 된다. 따라서 $q = {}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$이고 $p - q = 15 - 35 = -20$이다.

(2) $f(a) > 2a$인 함수 f의 개수는 $p = (n-2)(n-4)(n-6)$이다.
$a < b$이면 $f(a) < f(b)$인 함수 f의 개수는 $q = {}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$이다. 따라서

$$p - q = (n-2)(n-4)(n-6) - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{(n-2)(5n^2 - 59n + 144)}{6}.$$

n이 7보다 크므로 $n - 2 > 0$이다. 또한

$$5n^2 - 59n + 144 = 5\left(n - \frac{59}{10}\right)^2 - 5\left(\frac{59}{10}\right)^2 + 144$$

이므로 $n > \dfrac{59}{10}$일 때 이차식 $5n^2 - 59n + 144$은 n이 커짐에 따라 증가한다.
문제의 조건에서 $n \geq 7$이므로 $5n^2 - 59n + 144$은 n이 커짐에 따라 증가한다.
$n = 9$일 때 $5n^2 - 59n + 144 = 18 > 0$이므로 $n \geq 9$이면 $5n^2 - 59n + 144 > 0$이다.
$n = 8$일 때 $5n^2 - 59n + 144 = -8 < 0$이므로 $p - q > 0$을 만족하도록 하는 n의 최솟값은 9이다.

[문제 2-3]
(답) 4, 7

(풀이)
삼각형 OAP에서 밑변 OA의 길이가 일정하므로 삼각형의 넓이가 최댓값을 갖는 것은 점 P에서 직선 $y = 4x$에 이르는 거리가 최대일 때이다. 또한 이것은 점 P에서의 접선이 직선 $y = 4x$와 평행할 때이다. 따라서 $f'\left(\dfrac{4}{3}\right) = 4$이다.
$g(x) = f(x) - 4x$라 하자. $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.
0과 3이 방정식 $g(x) = 0$의 근이므로 $g(x)$는 다음과 같은 형태이다.

$$g(x) = x(x-3)(x-b)$$

따라서 $f(x) = g(x) + 4x = x(x-3)(x-b) + 4x = x^3 - (b+3)x^2 + (3b+4)x$ 이고

$f'(x) = 3x^2 - 2(b+3)x + (3b+4)$ 이다.

$f'\left(\frac{4}{3}\right) = 4$ 이므로 $3 \times \frac{16}{9} - 2(b+3) \times \frac{4}{3} + (3b+4) = 4$ 이다.

따라서 $b = 8$ 이고, $f(x) = x(x-3)(x-8) + 4x = x^3 - 11x^2 + 28x = x(x-4)(x-7)$ 이다.

$f(x) = 0$ 의 근이 0, 4, 7이므로 $f(x) = 0$ 의 0이 아닌 두 근은 4, 7이다.