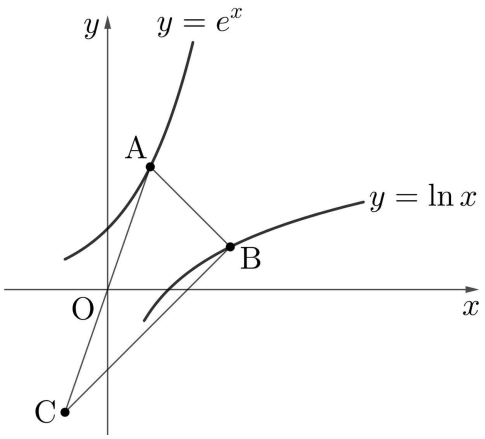
1. 문항 및 제시문

제시문 1

(가) 좌표평면 위의 점 (x, y)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-x, -y)$이다.

(나) 그림에서 점 A는 제1사분면 위의 점으로 곡선 $y = e^x$ 위에 있다. 점 B는 곡선 $y = \ln x$ 위의 점으로 직선 AB의 기울기는 -1이다. 점 C는 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점이다.



[문제 1] (17점)

(나)에서 $\angle ACB$의 크기가 최소일 때 점 A의 좌표를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

제시문 2

(가) 자연수의 거듭제곱의 합에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

(나) 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\,(i=1,\,2,\,\cdots,\,n)$일 때, X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$는
$\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\,\cdots\,+x_np_n$

[문제 2] (23점)

n장의 카드가 들어 있는 상자가 있다. 각각의 카드에는 1부터 n까지 자연수 중 한 개가 적혀 있고, 서로 다른 카드에 적혀 있는 자연수는 서로 다르다. 이 상자에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 수 중 가장 큰 수에서 가장 작은 수를 뺀 값을 확률변수 X라 하자. (단, n은 3 이상의 자연수)

(1) $n=10$일 때, $\mathrm{P}(X=9)$를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

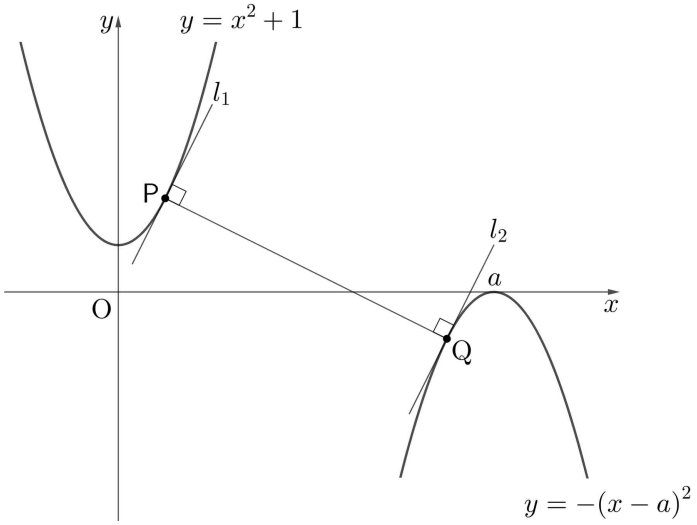
(2) $\mathrm{E}(X)=30$ 일 때, n을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

제시문 3

(가) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=f'(g(x))g'(x)$$

(나) 그림에서 직선 l_1은 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 P에서의 접선이고, 직선 l_2는 곡선 $y=-(x-a)^2$ 위의 점 Q에서의 접선이다. 직선 PQ는 직선 l_1, l_2와 각각 수직이다.



[문제 3] (29점)

(1) (나)에서 $a=8$일 때, 점 P의 좌표를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

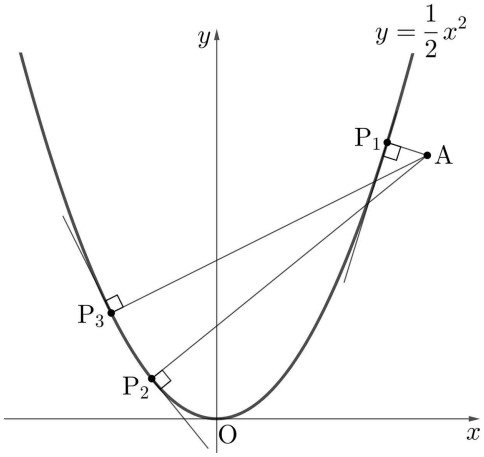
(2) (나)에서 선분 PQ의 길이를 L이라 하자. $a=8$일 때, $\frac{dL}{da}$의 값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

제시문 4

(가) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

(나) [그림]에서 세 점 P_1, P_2, P_3은 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위에 있고, 점 A는 곡선 위에 있지 않다. 세 직선 AP_1, AP_2, AP_3은 각각 점 P_1, P_2, P_3에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 접선과 수직이다.



[그림]

[문제 4] (31점)
다음 조건 (1), (2)를 모두 만족시키는 점 $\mathrm{A}(a,b)$의 개수를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

(1) a와 b는 모두 자연수이고 $4\le a\le 20,\ 5\le b\le 7$이다.
(2) [그림]처럼 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선과 직선 AP가 수직이 되는 점 P가 3개 있다.

2. 문항 해설

[문제 1] 좌표평면에서 점의 원점에 대한 대칭이동, 함수와 역함수의 그래프 등을 이해하여 문제를 해결할 수 있다.

[문제 2] 조합의 수, 이산확률변수, 확률변수의 기댓값, 자연수의 거듭제곱의 합을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

[문제 3] 합성함수의 미분과 역함수의 미분을 이용하여 함수의 미분계수를 구할 수 있다.

[문제 4] 서로 수직인 두 직선의 기울기 사이의 관계, 삼차함수의 극댓값과 극솟값을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

3. 예시 답안 혹은 정답 ※ *선다형의 경우 정답만 기입*

[문제 1]
(답) $(1,\ e)$

(풀이)
점 A의 좌표를 (a, e^a)이라 하자. 점 A와 점 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 점 A와 점 C는 원점에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이다. 삼각형 OBC는 이등변삼각형이고

$$\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{OCB}+\angle \mathrm{OBC}=2\angle \mathrm{OCB}=2\angle \mathrm{ACB}.$$

따라서, $\angle \mathrm{AOB}$의 크기가 최소일 때 $\angle \mathrm{ACB}$의 크기가 최소이다.
$y=e^x$의 그래프와 $y=\ln x$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 점 A와 점 B가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, 직선 OA가 곡선 $y=e^x$의 접선일 때 직선 OB도 곡선 $y=\ln x$의 접선이고 이때 $\angle \mathrm{AOB}$의 크기가 최소이다.
직선 OA가 곡선 $y=e^x$의 점 A에서의 접선이라고 하자. $\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$이므로 직선 OA의 기울기는 e^a이고, 직선 OA의 방정식은 $y=e^a x$이다. 이 직선이 점 $\mathrm{A}(a, e^a)$를 지나므로 $e^a=e^a\times a$이다. 따라서 $a=1$이고 답은 $(1, e)$이다.

[문제 2]
(답) (1) $\dfrac{1}{15}$ (2) 59

(풀이)
(1) 10장의 카드가 들어있는 상자에서 세 장의 카드를 꺼내는 방법의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3$이다. 카드에 적힌 수 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차가 9이면, 가장 큰 수는 10, 가장 작은 수는 1이다. 나머지 수는 $2, 3, \cdots, 9$의 8가지 경우가 가능하다. 따라서

$$\mathrm{P}(X=9)=\frac{8}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{15}$$

(2) $\mathrm{P}(X=k)$를 구하자. (단, $2\le k\le n-1$)
n장의 카드가 들어있는 상자에서 세 장의 카드를 꺼내는 방법의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_3$이다. 세 장의 카드에 적힌 수 중 가장 큰 수와 가장

작은 수의 차가 k이므로, 세 장의 카드에 적힌 수를 크기순으로 a, b, c라 하면 $c=a+k$이다. $a+k\le n$이므로 $a\le n-k$이다. 따라서 a가 될 수 있는 수는 $1, 2, \cdots, n-k$로 $n-k$가지이다. 각각의 a에 대하여 $a<b<a+k$이므로 b는 $a+1$부터 $a+k-1$까지의 수 중 하나이다. 따라서 각각의 a에 대하여 b가 될 수 있는 수는 $k-1$가지이다. 따라서 카드에 적힌 세 개의 수 중 가장 큰 수에서 가장 작은 수를 뺀 값이 k인 것은 총 $(n-k)\times(k-1)$가지가 있다.

따라서 $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{(n-k)(k-1)}{{}_n\mathrm{C}_3}$ 이다.

기댓값은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_3}\sum_{k=2}^{n-1}k(n-k)(k-1)=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_3}\sum_{k=1}^{n}k(n-k)(k-1)\\&=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_3}\sum_{k=1}^{n}\left(-k^3+(n+1)k^2-nk\right)\\&=\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\left\{-\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}-\frac{n^2(n+1)}{2}\right\}\\&=\frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X)=30$이므로 $\dfrac{n+1}{2}=30$이고, $n=59$이다.

[문제 3]

(답) (1) $(1,2)$ (2) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(풀이)

(1) 점 P의 좌표를 (b, b^2+1)이라고 하자. 점 P에서의 접선 l_1의 기울기는 $2b$이다.

점 Q의 좌표를 $(c, -(c-8)^2)$이라고 하자. 점 Q에서의 접선 l_2의 기울기는 $-2(c-8)$이다.

직선 l_1과 l_2가 평행하므로 $2b=-2(c-8)$이고 정리하면 $c=8-b$이다.

직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{-(c-8)^2-(b^2+1)}{c-b}=\dfrac{-2b^2-1}{8-2b}$이다.

직선 PQ가 직선 l_1과 수직이므로 $2b\times\left(\dfrac{-2b^2-1}{8-2b}\right)=-1$이다. 따라서 $b^3+b-2=0$이다.

$(b-1)(b^2+b+2)=0$이고, $b=1$이다. 따라서 점 P의 좌표는 $(1,2)$이다.

(2) 점 P의 좌표를 (b, b^2+1), 점 Q의 좌표를 $(c, -(c-a)^2)$라고 하자.

접선 l_1의 기울기는 $2b$이고, 접선 l_2의 기울기는 $-2(c-a)$이다.

직선 l_1과 l_2가 평행하므로 $2b=-2(c-a)$이고 정리하면 $c=a-b$이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $(a-b, -b^2)$이다.

직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{-b^2-(b^2+1)}{(a-b)-b}=\dfrac{-2b^2-1}{a-2b}$이다.

직선 PQ가 직선 l_1과 수직이므로 $2b\times\left(\dfrac{-2b^2-1}{a-2b}\right)=-1$이다. 따라서

$$a = 4b^3 + 4b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ (*)$$

또한 점 Q의 좌표는 $(4b^3 + 3b, -b^2)$이다. 점 P의 좌표가 (b, b^2+1)이므로

$$L = \sqrt{(4b^3+2b)^2 + (2b^2+1)^2} = \sqrt{4b^2(2b^2+1)^2 + (2b^2+1)^2} = (2b^2+1)\sqrt{4b^2+1}$$

$$\frac{dL}{db} = 4b\sqrt{4b^2+1} + (2b^2+1) \times \frac{8b}{2\sqrt{4b^2+1}} = \frac{8b(3b^2+1)}{\sqrt{4b^2+1}}$$

$a = 8$일 때 (*)에 의해 $b = 1$이고, $\frac{dL}{db} = \frac{32}{\sqrt{5}}$.

(*)에서 $\frac{da}{db} = 12b^2 + 4$이고, 역함수의 미분법에 의하여 $\frac{db}{da} = \frac{1}{12b^2+4}$이다. $b = 1$일 때, $\frac{db}{da} = \frac{1}{16}$이다.

따라서 $a = 8$일 때 $\frac{dL}{da} = \frac{dL}{db} \times \frac{db}{da} = \frac{32}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{16} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$

[문제 4]

(답) 8

(풀이)

점 P에서의 접선이 기울기가 t이고 직선 AP와 수직이므로 $t \times \frac{\frac{1}{2}t^2 - b}{t-a} = \frac{t^3 - 2bt}{2(t-a)} = -1$이다. 정리하면

$$t^3 - 2(b-1)t - 2a = 0.$$

$f(t) = t^3 - 2(b-1)t - 2a$라 하면 $f'(t) = 3t^2 - 2(b-1)$이다. $f'(t) = 0$일 때 $t = \pm\sqrt{\frac{2(b-1)}{3}}$ 이다.

조건 (2)를 만족시키려면 $f(t) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

(i) $b = 5$일 때

$\sqrt{\frac{2(b-1)}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$ 이다. $f(t) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}\right) < 0$이다.

따라서 $\left(\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} - 8\sqrt{\frac{8}{3}} - 2a\right)\left(-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} + 8\sqrt{\frac{8}{3}} - 2a\right) < 0$이고, $\left(a + \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}\right)\left(a - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}\right) < 0$이다.

$-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}} < a < \frac{8}{3}\sqrt{\frac{8}{3}}$ 이고, $a^2 < \frac{512}{27} = 18 + \frac{26}{27}$이므로 $a \le 4$이다. 조건 (1)에 의해 $a = 4$이다.

(ii) $b = 6$일 때

$\sqrt{\frac{2(b-1)}{3}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ 이다. $f(t) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $f\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{\frac{10}{3}}\right) < 0$이다.

(i)과 같이 풀면 $-\frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} < a < \frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$ 을 얻는다.

$a^2 < \frac{1000}{27} = 37 + \frac{1}{27}$이므로 $a \le 6$이다. 조건 (1)에 의해 $a = 4, 5, 6$이다.

(iii) $b = 7$일 때

$\sqrt{\frac{2(b-1)}{3}} = 2$이다. $f(t) = 0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건은 $f(2) \times f(-2) < 0$이다.

(i)과 같이 풀면 $-8 < a < 8$을 얻는다. 조건 (1)에 의해 $a = 4, 5, 6, 7$이다.
따라서 조건 (1), (2)를 모두 만족시키는 점 $\mathrm{A}(a,b)$의 개수는 $1+3+4=8$이다.