2025년도 동국대학교 모의논술

모의논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2025년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제1	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학, 수학II, 미적분, 기하
	핵심개념 및 용어	타원, 삼각형의 넓이, y축 대칭, 최댓값
예상 소요 시간	27분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 두 초점 $\mathrm{F}(c,0)$, $\mathrm{F}'(-c,0)$에서의 거리의 합이 $2a(a>c>0)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{(단, } b^2=a^2-c^2\text{)}$$

-『고등학교 기하』

【나】 점 $\mathrm{P}(x,y)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_1의 좌표는 $(x,-y)$, y축에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는 $(-x,y)$, 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는 $(-x,-y)$ 이다.

-『고등학교 수학』

【다】 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

-『고등학교 수학 II』

【라】 두 함수 $y=f(u)$, $u=f(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} \text{ 또는 } \{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

-『고등학교 미적분』

【마】n이 실수일 때, $y=x^n$ $(x>0)$ 이면

$$y'=nx^{n-1}$$

-『고등학교 미적분』

[문제1] 장축의 길이가 2이고 단축의 길이가 1인 타원이 주어졌다. 타원에서 한 점 P을 잡고 그 점을 장축에 의하여 대칭한 점 Q를 잡자. 타원에서 또다른 점 R을 잡아서 만든 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값을 구하시오.

3. 출제의도

이차곡선, 특히 타원의 형태와 식을 이해하고 도형의 대칭이동에 대하여 이해하는지 확인한다. 적절히 기하학적 모형에 대한 식을 세우고 미분을 통하여 최대값을 찾을 수 있는지 평가한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	수학 (2) 기하 4 도형의 이동 수학Ⅱ (2) 미분 3 도함수의 활용 미적분 (2) 미분법 2 여러 가지 미분법 기하 (1) 이차곡선 1 이차곡선
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[10수학02-09] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12기하01-02] 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 수학	권오남 외 14인	교학사	2020	147
	고등학교 수학 Ⅱ	이준열 외 9인	천재교육	2020	87
	고등학교 미적분	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2020	81, 83
	고등학교 기하	황선욱 외 8인	미래엔	2020	29

5. 문항해설

1. 문제에서 제시된 타원의 방정식을 적절하게 축을 잡아서 찾는다.
2. 장축이 x축인 타원을 주어진 경우 점 P와 그 점의 x축 대칭점 Q을 찾는다.
3. 주어진 점 P에 대하여 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되도록 R을 장축과 타원의 교점임을 보인다.
4. 이 경우 삼각형 PQR의 넓이의 식을 구한다.
5. 미분을 통하여 삼각형 PQR의 넓이의 최대값을 구한다.

6. 평가기준

[단계 1] 장축이 x축이 되도록 타원을 잡으면 제시문 **【가】**에 의하여 이 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 이다.

[단계 2] 타원의 점 P의 좌표를 (α,β)라고 하자. 점 P를 장축인 x축에 의하여 대칭한 점 Q의 좌표는 제시문 나에 의하여 $(\alpha,-\beta)$이므로 각각의 점 P에 대하여 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되는 점 R의 위치는 직선 PQ, 즉 직선 $x=\alpha$까지 거리가 가장 먼 점이다. 따라서 $\alpha \geq 0$이면 $\mathrm{R}(-2,0)$인 경우 $\alpha < 0$인 경우 $\mathrm{R}(2,0)$인 경우 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 된다.

[단계 3] 이 때, 삼각형 PQR의 넓이 S는 $\frac{1}{2}|2\beta|(2+|\alpha|)=|\beta|(2+|\alpha|)=|\beta|(2+2\sqrt{1-\beta^2})$이다. 대칭에 의하여 $0<\beta<1$ 인 경우만 생각하면 삼각형 PQR의 넓이는 $S=2\beta(1+\sqrt{1-\beta^2})$ 이다.

[단계 4] 극값을 찾기 위하여 S를 β로 미분하면 $\frac{dS}{d\beta}=2+2\sqrt{1-\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\sqrt{1-\beta^2}+1-2\beta^2\right)$ 이고 $\frac{dS}{d\beta}=0$이라고 놓으면 $\sqrt{1-\beta^2}=2\beta^2-1$이다. 제곱하여 한쪽으로 정리하면 $\beta^2(4\beta^2-3)=0$을 얻는다. 따라서 $\alpha=1$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, 최댓값을 가지고 삼각형 PQR의 최대 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

	채점 기준	배점
상	[1단계]부터 [4단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [4단계]까지 모두 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
중	[1단계]부터 [4단계]까지 모두 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [4단계] 중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [4단계] 중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
하	[1단계]부터 [4단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

장축이 x축이 되도록 타원을 잡으면 제시문 **【가】**에 의하여 이 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 이다. 타원의 점 P의 좌표를 (α,β)라고 하자. 점 P를 장축인 x축에 의하여 대칭한 점 Q의 좌표는 제시문 **【나】**에 의하여 $(\alpha,-\beta)$이므로 각각의 점 P에 대하여 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 되는 점 R의 위치는 직선 PQ, 즉 직선 $x=\alpha$까지 거리가 가장 먼 점인 $(2,0)$ 또는 $(-2,0)$이다. 따라서 $\alpha \geq 0$이면 $\mathrm{R}(-2,0)$, $\alpha < 0$인 경우 $\mathrm{R}(2,0)$일 때, 삼각형 PQR의 넓이가 최대가 된다. 이 경우 삼각형 PQR의 넓이 S는 $\frac{1}{2}|2\beta|(2+|\alpha|)=|\beta|(2+|\alpha|)=|\beta|(2+2\sqrt{1-\beta^2})$ 이다. 대칭에 의하여 $0\leq\beta\leq 1$인 경우로 생각하면 삼각형 PQR의 넓이는 $S=2\beta(1+\sqrt{1-\beta^2})$ 이다. 넓이 S를 β로 미분하면 제시문 **【라】**와 제시문 **【마】**에 의하여 $\frac{dS}{d\beta}=2+2\sqrt{1-\beta^2}-\frac{2\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\sqrt{1-\beta^2}+1-2\beta^2\right)$ 이고 극값을 찾기 위하여 제시문 **【다】**에 의해 $\frac{dS}{d\beta}=0$으로 놓으면 $\sqrt{1-\beta^2}=2\beta^2-1$이다. 제곱하여 정리하면 $\beta^2(4\beta^2-3)=0$을 얻는다. 따라서 $\alpha=1$, $\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, 최댓값을 가지고 삼각형 PQR의 최대 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

2025년도 동국대학교 모의논술

모의논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2025년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제2	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	확률과 통계
	핵심개념 및 용어	배반사건, 독립사건, 확률의 덧셈정리, 확률의 곱셈정리
예상 소요 시간	27분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

【가】 표본공간 S의 사건 A, B에 대하여

$$P(A\bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A\bigcap B)$$

사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$P(A\bigcup B) = P(A) + P(B)$$

-『고등학교 확률과 통계』

【나】 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A\bigcap B) = P(A)P(B\,|A) \quad \text{(단, } P(A) \neq 0\text{)}$$

$$P(A\bigcap B) = P(B)P(A\,|B) \quad \text{(단, } P(B) \neq 0\text{)}$$

-『고등학교 확률과 통계』

【다】 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은

$$P(A\bigcap B) = P(A)P(B) \quad \text{(단, } P(A) \neq 0, \quad P(B) \neq 0\text{)}$$

-『고등학교 확률과 통계』

[문제2] 철수는 한 변의 길이가 550mm인 정사각형의 표적지에 사격을 한다. 표적지에는 표적지 중심을 기준으로 반지름이 25mm부터 25mm씩 증가하는 동심원이 10개 그려져 있다. 탄착점의 중심을 포함하는 원의 개수를 점수로 하되, 탄착점의 중심이 원의 경계를 맞힌 경우도 그 원에 포함된 것으로 한다. 표적지를 맞췄을 때, 얻게 될 점수의 확률은 표적지 전체 면적 대비 해당 점수가 나오는 영역의 면적 비율로 한다. 과거 사격 기록에 의하면 철수는 표적지를 못 맞추는

비율이 19%였다. 철수가 3발을 사격 했을 때, 총점이 29점 이상일 확률을 각각 제시문을 이용하여 설명하고 구하시오. 단, 각각의 사격은 모두 독립이다.

3. 출제의도

문제에서 요구하는 사건을 확률 산정이 가능한 개개의 사건들로 정리하고, 확률의 덧셈정리 및 곱셈정리를 이용하여 문제의 해를 구한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	확률과 통계 (2) 확률 (가) 확률의 뜻과 활용 확률과 통계 (2) 확률 (나) 조건부확률
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통02-06] 사건의 독립과 종속의 의미를 이해하고, 이를 설명할 수 있다. [12확통02-07] 확률의 곱셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 확률과 통계	박교식 외 19인	동아출판사	2020	51
	고등학교 확률과 통계	고성은 외 5인	좋은책 신사고	2020	60, 64

5. 문항해설

문제에서 철수가 표적지를 맞췄을 때만 점수가 산정되고 그 확률함수가 표적지 면적 대비 해당영역의 비율로 산정된다. 이러한 이유로 제시문 나)에 의해 철수가 특정 점수를 얻을 확률은 표적지를 맞출 확률과 표적지를 맞췄을 때 특정 점수를 얻을 조건부확률의 곱으로 구한다.
각각의 사격은 모두 독립이므로 제시문 다)에 의해 첫 번째 사격, 두 번째 사격, 세 번째 사격의 취득점수의 확률을 각각 곱하여 3발 사격의 결과에 대한 확률을 구한다.
3발의 총점이 29점 이상인 3발의 사격 결과를 나열하고 각각의 경우는 서로 배반이므로 제시문 가)에 의해 각 경우의 확률의 합으로 철수의 3발 총점이 29점 이상일 확률을 구한다.

6. 평가기준

[단계 1] 3발 사격의 점수를 순서대로 나열하여 (a,b,c)와 같이 표현하면, 총점이 29점 이상인 경우는 (10,10,10), (10,10,9), (10,9,10), (9,10,10)로 표현할 수 있다. 이들은 서로 배반사건이기 때문에 제시문 가)에 의해 총점 29점 이상의 확률은 각각의 경우의 확률들의 합으로 구한다.

[단계 2] 3발 각각의 사격은 독립이므로 각 사격은 독립이다. 제시문 다)에 의해 각 사격 점수의 확률들의 곱으로 3발 사격 결과의 확률을 구한다.

[단계 3] 1발의 사격 점수가 10점일 확률은 철수가 표적지를 맞출 확률 $p_0 = 1 - 0.19 = 0.81$에 표적지를 맞췄을 때 10점이 될 확률은 표적지 넓비 대비 가장 작은 동심원의 면적비와 같으므로 $p_1 = \frac{25^2\pi}{550^2} = \frac{\pi}{22^2}$이 된다. 따라서 제시문 나)에 의해 철수가 10점을 받을 확률은 $0.81p_1 = \frac{0.81\pi}{22^2}$이다.

[단계 4] 1발의 사격 점수가 9점일 확률은 철수가 표적지를 맞출 확률 $p_0 = 1 - 0.19 = 0.81$에 표적지를 맞췄을 때 10점이 될 확률은 표적지 넓비 대비 가장 작은 동심원과 두 번째로 작은 동심원 사이의 면적비와 같으므로 $p_2 = \frac{50^2\pi}{550^2} - \frac{25^2\pi}{550^2} = \frac{3\pi}{22^2}$이 된다. 따라서 제시문 나)에 의해 철수가 9점을 받을 확률은 $0.81p_2 = \frac{2.43\pi}{22^2}$이다.

[단계 5] 1, 2 단계에서 제시한 방법으로 3, 4 단계에서 구한 확률을 이용하여 철수가 3발 총합이 29점 이상일 확률은 다음과 같이 구한다.

$$(0.81p_1)^3 + 3(0.81p_1)^2 \times (0.81p_2) = 0.81^3 p_1^2 (p_1 + 3p_2) = 0.81^3 \left(\frac{\pi}{22^2}\right)^2 \left(\frac{10\pi}{22^2}\right) = 10\pi^3 \left(\frac{9}{220}\right)^6$$

하위문항	채점 기준	배점
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모두 작성하고 네 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
	[1단계]부터 [5단계] 중 네 단계를 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

3발의 총점이 29점 이상인 경우는 사격 순서대로 점수를 나열하면 (10,10,10), (10,10,9), (10,9,10), (9,10,10)와 같이 4가지 경우의 사건으로 표현할 수 있고 이들 사건은 서로 배반이다..

철수가 1발의 사격에서 10점과 9점을 받는 사건을 정의하기 위해서 '철수가 표적지를 맞추는 사건' A, '1발의 사격에서 10점을 받을 사건' B_1, '1발의 사격에서 9점을 받을 사건' B_2를 먼저 정의한다. 그리고 철수가 1발의 사격에서 10점과 9점을 받는 사건은 각각 $A\bigcap B_1$, $A\bigcap B_2$로 정리한다.

1발의 사격에서 표적지를 맞췄을 때 10점과 9점을 받을 확률은 각각 $P(B_1\,|A)=p_1=\frac{25^2\pi}{550^2}=\frac{\pi}{22^2}$와 $P(B_2\,|A)=p_2=\frac{50^2\pi-25^2\pi}{550^2}=\frac{3\pi}{22^2}$이 된다.

따라서 제시문 나)에 의해 철수가 1발 사격에서 10점과 9점을 받을 확률은 각각 $P(A\bigcap B_1)=P(A)P(B_1\,|A)=0.81\times p_1$, $P(A\bigcap B_2)=P(A)P(B_2\,|A)=0.81\times p_2$이 된다.

3발의 사격은 각각 독립이므로 그 점수가 (10,10,10), (10,10,9), (10,9,10), (9,10,10)인 경우의 확률은 제시문 다)에 의해 각각 $(0.81p_1)^3$, $(0.81p_1)^2\times(0.81p_2)$, $(0.81p_1)^2\times(0.81p_2)$, $(0.81p_1)^2\times(0.81p_2)$이 된다.

그러므로 제시문 가)에 의해 3발의 사격에서 철수가 29점 이상 받을 확률은 이들의 합과 같다.

$$(0.81p_1)^3+3(0.81p_1)^2\times(0.81p_2)=0.81^3p_1^2(p_1+3p_2)=0.81^3\left(\frac{\pi}{22^2}\right)^2\left(\frac{10\pi}{22^2}\right)=10\pi^3\left(\frac{9}{220}\right)^6$$

2025년도 동국대학교 모의논술

모의논술고사 문제 문항카드(자연계열)

1. 일반 정보

유형	■ 논술고사 □ 면접 및 구술고사	
전형명	2025년도 모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 문제3	
출제 범위	수학과 교육과정 과목명	수학 II, 미적분
	핵심개념 및 용어	
예상 소요 시간	36분 / 전체 90분	

2. 문항 및 제시문

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

【가】 중심이 원점 $(0,0)$인 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$를 매개변수 t로 나타내면 다음과 같다.

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t\ \ (0\le t<2\pi)$$

-『고등학교 미적분』

【나】 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x,y)가 두 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$로 나타내어질 때, 시각 t에서 점 P의 속력은 $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 이다.

-『고등학교 미적분』

【다】 사인함수와 코사인함수의 덧셈과 뺄셈 정리는 각각 다음과 같다.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

-『고등학교 미적분』

【라】 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

-『고등학교 수학 II』

[문제3] 중심이 $(1,0)$이고 반지름이 1인 원 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}_1(1+\cos t,\ \sin t)$과 중심이 원점 $\mathrm{O}(0,0)$이고 반지름이 2인 원 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}_2(2\cos\theta(t),\ 2\sin\theta(t))$가 있다. 두 원 위의 교점 $(2,0)$에서 두 원 위를 시계 반대 방향을 따라 움직이는 두 점 P_1, P_2의 속도의 비가 $1:4$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, $0\le t<2\pi$)

(1) $t=t_0$**에서 두 점 사이의 거리가 최대일 때,** $\cos(t_0)$**와 거리를 구하시오.**

(2) $t=t_0$**에서 두 점의 위치를 모두 구하시오.**

3. 출제의도

원 위를 움직이는 점의 속도를 구할 수 있고, 두 원 위의 점 사이의 거리를 함수로 표현 하여 미분과 삼각함수의 덧셈과 뺄셈 정리를 이용하여 최대 거리를 구할 수 있는지를 평가한다.

4. 출제근거

가) 적용 교육과정 및 학습내용 성취 기준

적용 교육과정	미적분 (2) 미분법 [1] 여러 가지 함수의 미분 미적분 (2) 미분법 [3] 도함수의 활용 미적분 (2) 미분법 [1] 여러 가지 함수의 미분 수학II (2) 미분 [3] 도함수의 활용
문항 및 제시문	학습내용 성취 기준
성취기준	[12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다. [12미적02-14] 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다. [12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12수학Ⅱ02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

나) 자료출처

참고자료	도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
고등학교 교과서	고등학교 미적분	홍성복 외 10인	지학사	2020	95,126
	고등학교 미적분	권오남 외 14인	교학사	2020	125
	고등학교 미적분	박교식 외 19인	동아출판	2020	126
	고등학교 미적분	이준열 외 7인	천재교육	2020	66
	고등학교 수학Ⅰ	이준열 외 9인	천재교육	2020	85
	고등학교 수학Ⅰ	권오남 외 14인	교학사	2020	90
기타					

5. 문항해설

두 원 위를 움직이는 두 점의 속력의 비를 이용하여 P_2의 매개변수를 찾는다. 거리함수를 정의하여 도함수와 삼각함수의 덧셈과 뺄셈 정리를 이용하여 극점을 찾는다. 식을 간단히 하여 움직이는 두 점 P_1, P_2사이의 최대 거리와 좌표를 계산한다.

6. 평가기준

[단계 1] 점 $P_1(1+\cos t, \sin t)(0 \le t < 2\pi)$의 속력은 $\sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 1$이다. 속력의 비가 $1:4$이므로 점 $P_2(2\cos\theta(t), 2\sin\theta(t))$의 속력은 $2\sqrt{(\sin^2\theta(t)+\cos^2\theta(t))\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} = 2\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$=4가 되어야 한다. 즉 $\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = 2$, 즉 $\theta(t) = 2t$가 되며 $C_2 : (2\cos 2t, 2\sin 2t)$가 된다.

[단계 2] 두 점 사이의 거리를 d라 두면 $f(t) = d^2 = (1+\cos t - 2\cos 2t)^2 + (\sin t - 2\sin 2t)^2$
$= 6 + 2\cos t - 4\cos 2t - 4\cos 2t\cos t - 4\sin 2t \sin t$ 이다.

삼각함수의 합의 공식 $\cos(t-2t) = \cos(2t)\cos t + \sin 2t \sin t = \cos(-t)$을 이용하여 $f(t) = 6 - 2\cos t - 4\cos 2t$를 얻는다. $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$을 대입하면 $f(t) = 10 - 2\cos t - 8\cos^2 t$가 된다.

[단계 3] 함수 $f(t)$를 미분하면 $f'(t) = 2\sin t + 16\sin t\cos t$이며 $\sin t = 0$, $\cos t = -\frac{1}{8}$일 때 극점을 갖는다.

$\sin t = 0$일 때 $\cos t = 1$또는-1이며 $f(t) = 0$, 또는 4이며 $\cos t = -\frac{1}{8}$일 때, $f(t) = \frac{81}{8}$이 된다.

[단계 4] 그러므로 $\cos(t_0) = -\frac{1}{8}$, $\cos 2t_0 = 2\cos^2 t_0 - 1 = -\frac{31}{32}$ 이고 최대 거리는 $d = \frac{9}{2\sqrt{2}}$이다.

[단계 5] $\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t = \mp\frac{\sqrt{63}}{32}$, $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = -\frac{31}{32}$이다.

그러므로, $t = t_0$일 때 점의 위치는 $P_1\left(\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{63}}{8}\right)$, $P_2\left(-\frac{31}{16}, -\frac{\sqrt{63}}{16}\right)$ 또는 $P_1\left(\frac{7}{8}, -\frac{\sqrt{63}}{8}\right)$, $P_2\left(-\frac{31}{16}, \frac{\sqrt{63}}{16}\right)$ 이다.

하위문항	채점 기준	배점
	[1단계]부터 [5단계]까지 모든 단계를 논증이 매끄럽게 작성한 경우	S
	[1단계]부터 [5단계]까지 모두 작성하고 네 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	A
	[1단계]부터 [5단계] 중 네 단계를 작성하고 세 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	B
	[1단계]부터 [5단계] 중 세 단계를 작성하고 두 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	C
	[1단계]부터 [5단계] 중 두 단계를 작성하고 한 단계 이상 논증이 매끄러운 경우	D
	[1단계]부터 [5단계] 중에서 어느 한 단계만 작성한 경우	E
	어느 단계의 일부분도 논증이 매끄럽게 진술하지 못한 경우, 백지인 경우	F

7. 예시답안

(1) 점 $P_1(1+\cos t, \sin t)(0 \le t < 2\pi)$의 속력은 $\sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 1$1이다. 속력의 비가 $1:4$이므로 점 P_2 $(2\cos\theta(t), 2\sin\theta(t))$의 속력은 $2\sqrt{(\sin^2\theta(t)+\cos^2\theta(t))(\frac{d\theta}{dt})^2} = 2\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$=4가 되어야 한다. 즉 $\left|\frac{d\theta}{dt}\right| = 2$, $\theta(t) = 2t$가 되며 점 $P_2(2\cos 2t, 2\sin 2t)$가 된다. 두 점 P_1, P_2 사이의 거리를 d라 두면 $f(t) = d^2 = (1+\cos t - 2\cos 2t)^2 + (\sin t - 2\sin 2t)^2 = 6 + 2\cos t - 4\cos 2t - 4\cos 2t\cos t - 4\sin 2t \sin t$ 이다.

삼각함수의 합의 공식$\cos(t-2t) = \cos(2t)\cos t + \sin 2t \sin t = \cos(-t)$을 이용하여 $f(t) = 6 - 2\cos t - 4\cos 2t$를 얻는다. $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$을 대입하면 $f(t) = 10 - 2\cos t - 8\cos^2 t$가 된다. 함수 $f(t)$를 미분하면 $f'(t) = 2\sin t + 16\sin t\cos t$이며 $\sin t = 0, \cos t = -\frac{1}{8}$일 때 극점을 갖는다.

$\sin t = 0$일 때 $\cos t = 1$또는-1이며 $f(t) = 0$, 또는 4이며 $\cos t = -\frac{1}{8}$일 때, $f(t) = \frac{81}{8}$이 된다.

그러므로 $\cos(t_0) = -\frac{1}{8}$, 최대 거리는 $d = \frac{9\sqrt{2}}{4}$이다.

(2) $\sin t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t = \mp\frac{\sqrt{63}}{32}$, $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1 = -\frac{31}{32}$이다.

그러므로, $t = t_0$일 때 점의 위치는 $P_1\left(\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{63}}{8}\right)$, $P_2\left(-\frac{31}{16}, -\frac{\sqrt{63}}{16}\right)$ 또는 $P_1\left(\frac{7}{8}, -\frac{\sqrt{63}}{8}\right)$, $P_2\left(-\frac{31}{16}, \frac{\sqrt{63}}{16}\right)$ 이다.