• 2교시 수리 영역 •

"가형" 정답

1	③	2	①	3	②	4	②	5	⑤
6	⑤	7	⑤	8	④	9	②	10	④
11	③	12	③	13	⑤	14	②	15	③
16	④	17	③	18	142	19	72	20	36
21	73	22	125	23	18	24	126	25	24
26	①	27	①	28	②	29	④	30	20

해 설

1. [ ] 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$6^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\times 3^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}\times 3^{\frac{4}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}$

$=2^3\times 3^1=24$

2. [출제의도] 행렬의 곱셈과 역행렬을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ 에서 $A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ 이므로

$(A+E)A^{-1}=E+A^{-1}$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 1이다.

3. [출제의도] 등비수열의 항의 값을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a\cdot a_3\cdot a_8=a\cdot ar^2\cdot ar^7=a^3r^9=(ar^3)^3$

이므로 $(ar^3)^3=64=4^3$

$\therefore\ a_4=ar^3=4$

4. [출제의도] 무한등비급수의 합을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$\log\ +\log_2\ 2+\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[8]{2}+\cdots$

$=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 2+\frac{1}{8}\log_2 2+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

5. [출제의도] 상용로그를 이용하여 거듭제곱의 자리수를 알아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

$\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}=1$ 에서 $\log_3(\log_2 x)=4^1=4$

$\log_2 x=3^4=81$, $\therefore\ x=2^{81}$

$\log_{10}x=\log_{10}2^{81}=81\log_{10}2=81\times 0.3010=24.381$

$\log_{10}x$의 지표가 24이므로 x는 25자리 자연수이다.

6. [출제의도] 행렬의 곱셈을 이용하여 역행렬을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$

$=(A^2+B^2)-(AB+BA)=-2E$

$\Rightarrow(A-B)\left(-\frac{1}{2}\right)(A-B)=E$

따라서 $A-B$의 역행렬은 $-\frac{1}{2}(A-B)$

[참고] $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ 은 주어진 조건을 만족한다.

7. [출제의도] 확률분포표에서 평균과 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

나온 눈	2, 4, 6	2, 4, 8	2, 6, 8	4, 6, 8	합
X	12	14	16	18	
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(평균) $=\frac{12+14+16+18}{4}=15$

(분산)

$=\frac{(12-15)^2+(14-15)^2+(16-15)^2+(18-15)^2}{4}$

$=5$

8. [출제의도] 등비수열과 계차수열의 관계를 알아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면

$a_n=ar^{n-1}$이고,

$b_n=a_{n+1}-a_n=ar^n-ar^{n-1}$

$=a(r-1)r^{n-1}$이다.

따라서, $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인 등비수열이다. $\therefore$ 참

ㄴ. (반례) $\{b_n\}$이 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열일 때, $\{a_n\}$의 첫째항이 2이면 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

$\{a_n\}$: 2, 3, 5, 9, 17, …

$\{b_n\}$: 1, 2, 4, 8, …

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열이면

$a_n=ar^{n-1}$이고, $\{b_n\}$은 첫째항이 $a(r-1)$, 공비가 r인 등비수열이므로, $\{a_n\cdot b_n\}$은 첫째항이 $a^2(r-1)$, 공비가 r^2인 등비수열이다.

$\therefore$ 참

9. [출제의도] 순열, 조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$2+2^2+2^3+2^4+2^5<2^6$이므로 $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$에서 가장 큰 수인 2^6은 표와 같이 3열에 위치하여야 한다. 그러면 ⑤에 위치할 수 있는 수는 2^6을 제외한 나머지 수 중 어떤 수가 위치하여도 되므로 5개이다. 또한 같은 방법으로 ②의 위치에 넣을 수 있는 수는 나머지 4개 중 가장 큰 수가 위치하여야 하므로 ④의 위치에 올 수 있는 수는 나머지 3개이다. 마지막으로 나머지 두 개의 수를 1열에 위치하도록 하면 된다. 이와 같이 수를 배열한 후 1행과 2행의 수를 바꾸는 경우는 각 열마다 2가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는 $5\times 3\times 1\times 2^3=120$ (가지)이다.

①	②	2^6
③	④	⑤

[다른 풀이] $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$중 어느 두 수의 합은 모두 다르다. 따라서, 구하는 경우의 수는 6개의 수를 2개, 2개, 2개의 세 조로 나눈 다음 각 조의 2개의 수의 자리를 바꾸는 경우의 수와 같다. 즉,

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{3!}\times 2^3=120$

10. [출제의도] 그래프를 이용하여 무리방정식의 실근이 존재할 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

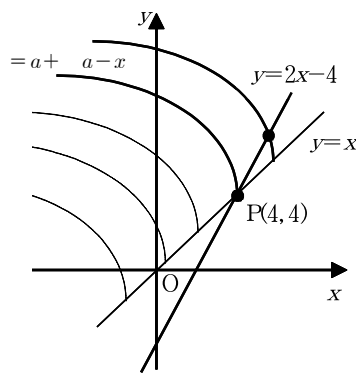
방정식 $a+\sqrt{a-x}=2x-4$ 의 실근은

곡선 $y=a+\sqrt{a-x}$와 직선 $y=2x-4$ 의 교점의 x좌표와 같다.

한편, $y=a+\sqrt{a-x}$의 그래프는 직선 $y=x$위의 점 (a, a)에서 시작되는 곡선이므로

$x=2x-4$ 에서 $x=4$ (그림참조)

따라서, 주어진 방정식이 실근을 갖기 위한 상수 a값의 범위는 $a\geq 4$ 이므로, 구하는 최소값은 4이다.



11. [출제의도] 상용로그를 이용하여 거듭제곱의 자리수의 관계를 알아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

$[\log 2N]=[\log N]+1$에서 $\log 2N$의 지표가 $\log N$의 지표보다 1만큼 크므로 $2N$의 자리수가 N의 자리수보다 1만큼 크다.

즉, $5\times 10^2\leq N<10^3$ $\therefore\ 2+\log 5\leq\log N<3$

ㄱ. $5.3980\leq\log N^2<6$에서 $\log N^2$의 지표는 항상 5이다. $\therefore$ N^2은 항상 6자리의 수이다.

ㄴ. $8.0970\leq\log N^3<9$에서 $\log N^3$의 지표는 항상 8이다. $\therefore$ N^3은 항상 9자리의 수이다.

ㄷ. $10.7960\leq\log N^4<12$에서 $\log N^4$의 지표는 10 또는 11이다.

$\therefore$ N^4은 11자리 또는 12자리의 수이다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ과 ㄴ이다.

12. [출제의도] 수학적귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(가) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\boxed{\sqrt{2}}$

(나), (다)

$\sqrt{k+1}-\boxed{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\boxed{k-\sqrt{k(k+1)}}}{\sqrt{k+1}}<0$

13. [출제의도] 조합의 수를 이용하여 이항분포 B(n, p)의 평균이 E(X)=np임을 증명할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$E(\ )=\sum_{r=0}^{n}\boxed{r}\cdot{}_nC_r p^r q^{n-r}$ --- (가)

$r\cdot\frac{n!}{(n-r)!r!}=\frac{n!}{(n-r)!(r-1)!}$

$=n\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$

$=\boxed{n\cdot{}_{n-1}C_{r-1}}$ --- (나)

$\boxed{(다)}=np$

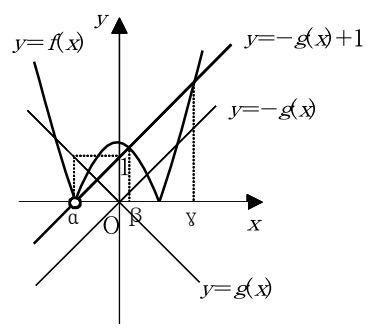
14. [출제의도] 그래프를 이용하여 분수방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{f(x)g(x)}$ 의 양변에

$f(x)g(x)$를 곱하면 $f(x)+g(x)=1$

(단, $f(x)g(x)\neq 0$) 즉, $f(x)=1-g(x)$

$y=f(x)$와 $y=1-g(x)$의 그래프의 교점을 구하면 그림과 같다.



교점의 x좌표는 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$

이 중에서 $x=\alpha$는 $f(\alpha)=0$이므로 무연근이다.

따라서, 실근은 β, γ로 2개이다.

15. [출제의도] 상용로그를 이용하여 실생활에서의 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

현재 산소농도가 21%이므로

10분씩 n번 경과한 후의 농도는 $21(1-0.01)^n$

따라서, $21(1-0.01)^n\leq 18$, $(0.99)^n\leq\frac{6}{7}$

양변에 상용로그를 취하여 계산하면

$n(\log 9.9-1)\leq\log 6-\log 7$

$n\geq\frac{0.0669}{0.0044}=\frac{669}{44}=15.2\times\times$ $\therefore\ n=16$

따라서 처음으로 산소농도가 18% 이하로 측정되는 시간은 10분씩 16번 경과했으므로 160분 후이다.

16. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 실생활에서의 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

n일 후 정오에 측정한 2호 댐의 저수량을 x_n(만톤)이라 하면 $x_n\times 0.98+100=x_{n+1}$

$(x_{n+1}-5000)=0.98(x_n-5000)$

$\therefore\ x_n-5000=(x_1-5000)0.98^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}x_n=5000+\lim_{n\to\infty}(x_1-5000)0.98^{n-1}=5000$

따라서, 측정되는 저수량은 5000만톤에 한없이 가까

워진다.

17. [ ] 행렬의 곱셈을 이용하여 실생활에서의 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(i) A과수원에서는 a_{11}그루의 사과나무에서 평균 b_{11}개의 사과가 열리고, B과수원에서는 a_{12}그루의 사과나무에서 평균 b_{21}개의 사과가 열리므로 두 과수원에서 생산된 사과의 총 개수는
$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=a$(개)이다.

(ii) 두 과수원에서 생산된 복숭아의 총 개수는
$a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=d$(개)이고, 복숭아 나무의 총 그루수는 $a_{21}+a_{22}=q$이므로 두 과수원의 복숭아 한그루당 열매의 평균개수는 $\frac{d}{q}$(개)이다.

18. [출제의도] ∑를 써서 수열의 합을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=1}^{5}(2^k+5k+1)=\sum_{k=1}^{5}2^k+\sum_{k=1}^{5}5k+\sum_{k=1}^{5}1$$
$$=\frac{2(2^5-1)}{2-1}+5\cdot\frac{5\cdot6}{2}+5$$
$$=62+75+5=142$$

19. [출제의도] 분수부등식을 만족하는 정수해를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$2x-1-\frac{5}{x-2}\le0,\quad\frac{(2x-1)(x-2)-5}{x-2}\le0$$
$$\frac{2x^2-5x-3}{x-2}\le0,\quad\frac{(2x+1)(x-3)}{x-2}\le0$$

$x\le-\frac{1}{2}$ 또는 $2<x\le3$ ($\because x=2$는 무연근)

따라서, 구하는 정수는 -4, -3, -2, -1, 3이고 모든 정수의 곱은 72이다.

20. [출제의도] 역행렬을 갖지 않을 조건을 알고 있는지를 묻는 문제이다.

행렬 M이 역행렬을 갖지 않으려면,
$D=a\cdot9-bc=0$ $\therefore\ 9a=bc$
서로 다른 a, b, c에 대하여 위의 등식을 만족하는 경우는 $a=2$이고,
($b=3$, $c=6$) 또는 ($b=6$, $c=3$)일 때 뿐이다.
$\therefore\ abc=36$

21. [출제의도] 조건부확률을 실생활에서의 문제에 응용할 수 있는지를 묻는 문제이다.

차량이 자가용일 사건을 A, 목격자가 자가용이라 증언할 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\mid B)$이다. 이 때, $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 이고
$P(B)=0.8\times0.9+0.2\times0.1=0.74$
$P(A\cap B)=0.8\times0.9=0.72$
이므로 구하는 확률은 $\frac{72}{74}=\frac{36}{37}$

$p=37$, $q=36$이므로 $p+q=73$

22. [출제의도] 그래프에서 극한을 이용하여 선분의 길이의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$S=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}$이고,

$x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(x_n^2-x_{n+1}^2)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{3}{4^{n+2}}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n-1}-x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

따라서, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$이므로 $100S=125$

<다른 풀이>

$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ 이므로 점 P_n과 점 Q_n은 점 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$에 한없이 가까워진다.

$A_n(x_n,0)$, $B_n(0,x_n^2)$이라 하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}$$
$$=(1-\overline{Q_1A_0})+(\overline{Q_1A_0}-\overline{Q_2A_1})+\cdots$$
$$=1-\lim_{n\to\infty}Q_nA_{n-1}=1-\lim_{n\to\infty}x_n^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}$$
$$=(1-\overline{B_1P_1})+(\overline{B_1P_1}-\overline{B_2P_2})+\cdots$$
$$=1-\lim_{n\to\infty}\overline{B_nP_n}=1-\lim_{n\to\infty}x_n=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$이므로 $100S=125$

23. [출제의도] 로그함수의 그래프에서 조건을 만족하는 점을 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

네 점 A Q P, R의 좌표가 각각
$(1,0)$, $(a,0)$, (a,b), $(0,b)$이므로

(삼각형 AQP의 넓이) $=\frac{1}{2}\overline{AQ}\cdot\overline{PQ}$

$=\frac{1}{2}(a-1)\cdot b$

(사각형 OAPR의 넓이) $=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{PR})\cdot\overline{OR}$

$=\frac{1}{2}(1+a)\cdot b$

$\frac{(\text{사각형 OAPR의 넓이})}{(\text{삼각형 AQP의 넓이})}=\frac{5}{4}$ 에서

$$\frac{\frac{1}{2}(1+a)\cdot b}{\frac{1}{2}(a-1)\cdot b}=\frac{5}{4}$$

$\therefore 5a-5=4+4a$ $\therefore a=9$……㉠
$P(a,b)$는 $y=\log_3x$위에 있으므로
$b=\log_39=2$ $\therefore$ $ab=9\cdot2=18$

24. [출제의도] 조합의 수를 이용하여 실생활에서의 경우의 수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(i) 4개국이 있는 두 대륙을 여행하는 경우
$2\times{}_4C_3\times{}_4C_2=48$ (가지)

(ii) 4개국이 있는 대륙과 3개국이 있는 대륙을 여행하는 경우
$4\times({}_4C_3\times{}_3C_2+{}_3C_3\times{}_4C_2)=72$ (가지)

(iii) 3개국이 있는 두 대륙을 여행하는 경우
$2\times{}_3C_3\times{}_3C_2=6$ (가지)

이상에서 구하는 경우의 수는 126 (가지)이다.

25. [출제의도] 도형에서 선분의 길이의 비의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

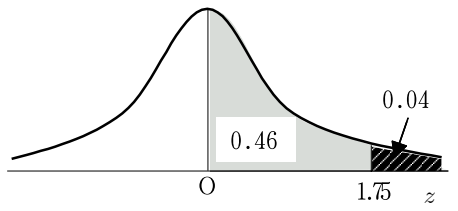
$\overline{AC_n}-\overline{OC_n}=n^2+48^2-n$,

$\overline{B_1D_n}=\frac{48}{n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+48^2}-n}{\frac{48}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+48^2}-n)(\sqrt{n^2+48^2}+n)}{\frac{48}{n}(\sqrt{n^2+48^2}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48^2}{48(\sqrt{1+\frac{48^2}{n^2}}+1)}=\frac{48}{2}=24$$

26. [출제의도] 표준정규분포표를 이용하여 시험점수의 위치를 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

상위 4% 이내에 속하려면 표준정규분포곡선에서
$0.5-0.04=0.46$이므로
표준정규분포표의 값을 이용하면, $z=1.75$ 이다.
표준화한 값 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$이므로
$X=\sigma Z+m=20\times1.75+50=85$



27. [출제의도] 지수법칙과 상용로그를 이용하여 주어진 관계식에서 표면적의 비를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

철수와 철수 아빠의 표면적을 각각 S_1, S_2라 하자.
$S_1=0.02\times90^{0.4}\times20^{0.5}$
$S_2=0.02\times(90\times2)^{0.4}\times(20\times4)^{0.5}$
$=2^{0.4}\times4^{0.5}\times(0.02\times90^{0.4}\times20^{0.5})$
$=2^{1.4}S_1$
이 때, $2^{1.4}=k$라 하면
$\log k=1.4\times\log2=1.4\times0.3010=0.4214$
상용로그표에서 $k\fallingdotseq2.64$
따라서, $S_2=2.64\,S_1$

28. [출제의도] 독립시행의 확률을 이해하고 이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

컵이 1개, 2개, 0개인 개수를 각각 x, y, z 로 두면
$1\times x+2\times y+0\times z=3$이다.
x, y, z는 0이상인 정수이므로

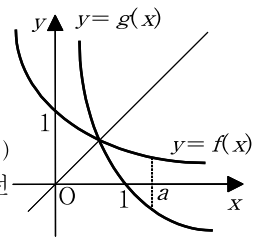
(i) $(x,y,z)=(3,0,0)$일 때, ${}_3C_3\left(\frac{p}{10}\right)^3=\frac{p^3}{1000}$

(ii) $(x,y,z)=(1,1,1)$일 때
${}_3C_1\left(\frac{p}{10}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{p}{100}\right)^1\times{}_1C_1p^1=\frac{6}{1000}p^3$

따라서 $\left(\frac{1}{1000}+\frac{6}{1000}\right)p^3=\frac{7}{1000}p^3$

29. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 관계를 이해하고 관련성을 파악할 수 있는지를 묻는 문제이다.

두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$
는 서로 역함수이므로 그래프는 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



ㄱ. 그래프에서 $a>1$ 일 때, $f(a)>g(a)$ 이다. (거짓)
ㄴ. 두 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\alpha=\beta$ (참)
ㄷ. $b<f(a)\Leftrightarrow g(b)>a$
$\Leftrightarrow 2g(b)>2a\Leftrightarrow 2a<g(b^2)$
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

30. [출제의도] 분수방정식을 이용하여 실생활에서 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

A항구와 B항구를 왕복하는 여객선이 정상적으로 운행할 때의 속력은 a(km/시)이므로 10시에 A항구를 출발한 여객선이 기관 이상이 생기기 전까지 운행한 시간은 $\frac{40}{a}$ (시간), 기관 고장 후 운행한 시간은 $\frac{20}{a-10}$ (시간), 11시에 A항구를 출발한 여객선이 B항구에 도착할 때까지 걸린 시간은 $\frac{60}{a}$ (시간)이다.
두 여객선이 동시에 B항구에 도착하였으므로
$\frac{40}{a}+\frac{20}{a-10}=\frac{60}{a}+1$, $\frac{20}{a-10}-\frac{20}{a}=1$
위의 식의 양변에 $a(a-10)$을 곱하여 정리하면
$20a-20(a-10)=a(a-10)$
$a^2-10a-200=0$, $(a+10)(a-20)=0$
$\therefore a=20$ ($\because a>0$)

‘나형’ 정답

1	③	2	①	3	②	4	②	5	⑤
6	⑤	7	②	8	④	9	①	10	④
11	③	12	③	13	①	14	④	15	③
16	④	17	③	18	142	19	16	20	36
21	74	22	25	23	12	24	17	25	24
26	②	27	①	28	⑤	29	⑤	30	271

해 설

1. ‘ ’형과 공통

2. ‘가’형과 공통

3. ‘가’형과 공통

4. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 간단한 로그를 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$\log_2 5\sqrt{3}+\log_2\frac{24}{5}-\log_2 3\sqrt{3}=\log_2\frac{5\sqrt{3}\times\frac{24}{5}}{3\sqrt{3}}$$

$$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$$

5. ‘가’형과 공통

6. ‘가’형과 공통

7. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

8. ‘가’형과 공통

9. [출제의도] 주어진 점화식을 만족하는 수열의 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

주어진 점화식에 $n=2$를 대입하면

$a_1\cdot a_3=a_2\cdot a_4$, $1\cdot 4=2\cdot a_4$이므로 $a_4=2$

또, $n=3$을 대입하면

$a_2\cdot a_4=a_3\cdot a_5$, $2\cdot 2=4\cdot a_5$이므로 $a_5=1$

마찬가지로 $n=4, 5, 6, \cdots$를 차례대로 대입하면

구하는 수열은 1, 2, 4, 2, 1, 2, 4, 2, …

이 수열은 1, 2, 4, 2가 반복되는 수열이므로

$$\sum_{n=1}^{20}a_n=5\times 9=45$$

10. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$\log A=n+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<1$)라 하면

$\log\frac{1}{A}=-\log A=-n-\alpha$

$=(-n-1)+(1-\alpha)$이므로

지표는 $-n-1$, 가수는 $1-\alpha$

이 때, 지표의 합은 -1, 가수의 합은 1이다.

$\therefore\ a^2+b^2=2$

11. ‘가’형과 공통

12. ‘가’형과 공통

13. [출제의도] 극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=x$라 하면 $a_{n+1}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ & a\end{vmatrix}$ 에서

$x=\boxed{2}+\frac{1}{x}$, $x^2-2x-1=0$

근의 공식에 의하여 $x=1\pm\sqrt{2}$

$x>2$이므로, $x=\boxed{1+\sqrt{2}}$

14. [출제의도] 주어진 행렬의 관계식에서 거듭제곱의 성질을 알아낼 수 있는지를 묻는 문제이다.

주어진 조건식의 양변에 행렬 A를 곱하여 정리하면

$A^2=-E$, $A^3=-A$, $A^4=E$

$A^2+(A^2)^{-1}=-E-E=-2E$

$A^3+(A^3)^{-1}=-A-A^{-1}=-(A+A^{-1})=O$

$A^4+(A^4)^{-1}=E+E=2E$

또한, 행렬 A^n은 주기가 4이므로

n이 홀수이면 $A^n+(A^n)^{-1}=O$

n이 짝수이면 $A^n+(A^n)^{-1}\neq O$

$\therefore$ ㄱ은 참, ㄴ은 거짓

한편, $A+A^2+A^3+A^4=A-E-A+E=O$

이므로 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{4n}=O$ 이다.

$\therefore$ ㄷ은 참

15. ‘가’형과 공통

16. ‘가’형과 공통

17. ‘가’형과 공통

18. ‘가’형과 공통

19. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 거듭제곱을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$2^a=3^2$, $3^b=5^3$에서 $3=2^{\frac{a}{2}}$, $5=3^{\frac{b}{3}}$이므로

$$5^c=\left(3^{\frac{b}{3}}\right)^c=3^{\frac{bc}{3}}=\left(2^{\frac{a}{2}}\right)^{\frac{bc}{3}}=2^{\frac{abc}{6}}$$

$$=2^{\frac{24}{6}}=2^4=16$$

20. ‘가’형과 공통

21. [출제의도] 정의에 맞는 수열의 일반항을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$1=1_{(2)}$, $2=10_{(2)}$, $3=11_{(2)}$, $4=100_{(2)}$,

$5=101_{(2)}$, …, $20=10100_{(2)}$이므로

$a_1=1$, $a_2=a_3=2$, $a_4=a_5=a_6=a_7=3$,

$a_8=a_9=\cdots=a_{15}=4$, $a_{16}=a_{17}=\cdots=a_{20}=5$

따라서, 첫째항부터 제 20 항까지의 합은

$1+2\times 2+3\times 4+4\times 8+5\times 5$

$=1+4+12+32+25=74$

22. [출제의도] 지수법칙과 부분분수의 합을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$f(2\cdot 3)f(3\cdot 4)\cdots f(9\cdot 10)$

$=a^{\frac{1}{2\cdot 3}}\cdot a^{\frac{1}{3\cdot 4}}\cdots a^{\frac{1}{9\cdot 10}}=a^{\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10}}$

$=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}$

$=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}=a^{\frac{4}{10}}=a^{\frac{2}{5}}=f\left(\frac{5}{2}\right)$

$\therefore\ 10k=10\cdot\frac{5}{2}=25$

23. [출제의도] 행렬의 거듭제곱을 추정하여 주어진 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$A^2=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{2005}=(A^3)^{668}\cdot A=A(\because A^3=E)$

$\therefore\ \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^{2005}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$에서 $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

그런데 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\ -5\end{pmatrix}$

$\therefore x-y=12$

24. [출제의도] 행렬의 곱으로 주어진 조건을 만족하는 점 P의 자취를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$A^2=16E$이므로

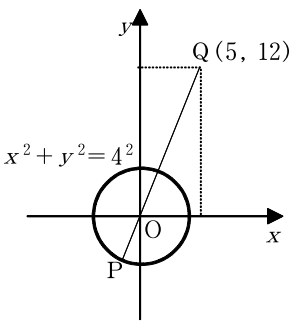
$A^2=\begin{pmatrix}x & y\\ y & -x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ y & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+y^2 & 0\\ 0 & x^2+y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$

$\therefore x^2+y^2=4^2$

따라서, 점 P의 자취는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 4인 원이다.

원의 중심 O에서 점 Q(5, 12)에 이르는 거리는

$\overline{OQ}=\sqrt{5^2+12^2}=13$ 이므로 선분 PQ의 최대값은 $13+4=17$ 이다.



25. ‘가’형과 공통

26. [출제의도] 직각삼각형의 세 변이 등차수열을 이룰 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

세 변을 $a=b-d$, b, $c=b+d$로 놓으면

피타고라스의 정리에서 $(b+d)^2=(b-d)^2+b^2$

$b^2-4bd=0$, $b(b-4d)=0$

$\therefore b=4d$ ($\because\ b>0$)

$a=4d-d=3d$, $c=4d+d=5d$

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times 3d\times 4d=6d^2$

27. ‘가’형과 공통

28. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 주어진 수열의 공차사이의 관계식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

첫째 수열은 $2a_1+d_1$, $2a_1+5d_1$, $2a_1+9d_1$, … 이므로 공차가 $d_2=4d_1$이고

둘째 수열은 $3a_1+3d_1$, $3a_1+12d_1$, $3a_1+21d_1$, … 이므로 공차가 $d_3=9d_1$이다

$\therefore\ 9d_2=4d_3$

29. [출제의도] 주어진 조건을 만족하는 함수의 그래프를 찾을 수 있는지를 묻는 문제이다.

주어진 연립방정식이 단 한 쌍의 해를 갖기 위해서는 $\begin{pmatrix}2 & f(x)\\ -1 & f(x)\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재해야 한다.

$\therefore\ 2\cdot f(x)-(-1)\cdot f(x)=3f(x)\neq 0$

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않아야 한다.

따라서, 구하는 답은 ⑤이다.

30. [출제의도] 계차수열을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

수열 1, 7, 19, 37, … 의 계차수열을 구하면,

첫째항이 $b_1=6$이고, 공차가 $d=6$인 등차수열이다

그러므로 10 번째항은

$$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}b_k=1+\sum_{k=1}^{9}6k$$

$$=1+6\cdot\frac{9\times 10}{2}=271$$