• 2교시 수리 영역 •

〔가 형〕

1	①	2	②	3	⑤	4	②	5	①
6	③	7	⑤	8	①	9	②	10	④
11	⑤	12	④	13	①	14	③	15	④
16	③	17	②	18	⑤	19	②	20	④
21	③	22	3	23	60	24	102	25	70
26	300	27	6	28	81	29	4	30	28

1. [출제의도] 거듭제곱근의 성질 이해하기

[해설] $\sqrt[3]{(-3)^3}-\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[5]{(-1)^5}$

$=-3-2-1=-6$

답 ①

2. [출제의도] 로그의 성질 알기

[해설]

$(1+\log_2 5)(1+\log_5 2)-(\log_{2^2}5^2+\log_{5^2}2^2)$

$=1+\log_2 5+\log_5 2+\log_2 5\log_5 2-\log_2 5-\log_5 2$

$=1+\log_2 5\cdot\dfrac{1}{\log_2 5}=2$

답 ②

3. [출제의도] 미지수가 2개인 연립일차방정식을 행렬로 나타내기

[해설] $(x-y)+(x+y)i=3-5i$이므로

$\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

따라서, A는 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$의 역행렬이다.

$\therefore A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

따라서, A의 모든 성분의 합은 1이다.

답 ⑤

4. [출제의도] 행렬의 뜻을 이해하고 3×3행렬 구하기

[해설] $a_{11}=4$, $a_{22}=2$, $a_{33}=3$,

$a_{12}=a_{21}=0$, $a_{13}=a_{31}=2$, $a_{23}=a_{32}=1$ 이므로

$M=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$이다.

답 ②

5. [출제의도] 지수방정식 풀기

[해설] $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^3+6}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right\}^{-2x^2-5x}$이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^3+6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2+5x}$

$\therefore\ x^3+6=2x^2+5x$

$x^3-2x^2-5x+6=0$

$(x-1)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2,\ 1,\ 3$이다.

따라서, 모든 x의 값들의 곱은 -6이다

답 ①

6. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

[해설] ㄱ. $f(0)=a^0-a^0=1-1=0$ $\therefore$ 참

ㄴ. $f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $f(3x)=a^{3x}-a^{-3x}=(a^x-a^{-x})^3+3(a^x-a^{-x})$

$=\{f(x)\}^3+3f(x)$ $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

7. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립일차방정식 풀기

[해설] $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

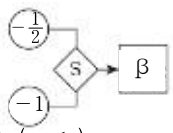
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\therefore\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

따라서, $x+y=5$이다.

답 ⑤

8. [출제의도] 무한급수의 수렴과 발산을 이해하기

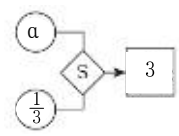
[해설]

(ⅰ) 

에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1}$은 발산하므로

〔그림2〕에 의하여 $\beta=\frac{1}{4}$

(ⅱ) 

에서

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$은 수렴하므로

〔그림1〕에 의하여 $\dfrac{\alpha}{1-\frac{1}{3}}=3$ $\therefore \alpha=2$

(ⅲ) 

에서

$|3|>1$이므로 〔그림4〕에 의하여 $\gamma=-\frac{1}{3}$

따라서, $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{23}{12}$

답 ①

9. [출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

[해설] $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqq 2)$이므로

$a_n=n^2-4n-(n-1)^2+4(n-1)$

$=2n-5$, $a_1=S_1=-3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{6n^2-20n+24}{n^2+2n-4}=6$

답 ②

10. [출제의도] 조합의 수 구하기

[해설] 7명을 2, 2, 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\dfrac{1}{2!}=105$이다.

$\therefore$ A, B, C 세 나라에 파견하는 경우의 수는

$105\times 6=630$

답 ④

11. [출제의도] 수학적귀납법의 원리 이해하기

[해설] (ii)에서

$n=k$ 일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^k\leqq\dfrac{a^k+b^k}{2}$ ……㉠ 이 성립한다.

㉠의 양변에 $\boxed{\dfrac{a+b}{2}}$를 곱하면

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}\leqq\left(\dfrac{a^k+b^k}{2}\right)\times\boxed{\dfrac{a+b}{2}}$

$=\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$

이 때,

$a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-a^kb=a^k(a-b)-b^k(a-b)$

$=(a-b)(a^k-b^k)$

이고, $a-b$와 a^k-b^k는 부호가 서로 같거나 0이므로,

$(a-b)(a^k-b^k)\boxed{\geqq}0$

$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{k+1}\leqq\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$

$\leqq\dfrac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

즉, $n=k+1$ 일 때, 주어진 식이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여

모든 자연수 n에 대하여 주어진 식은 성립한다.

답 ⑤

12. [출제의도] 거듭제곱근의 뜻과 성질 이해하기

[해설] ㄱ. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[12]{5}\neq\sqrt[7]{5}$ (거짓)

ㄴ. $1\leqq n<8$이면 $[\sqrt[3]{n}]=1$

$8\leqq n<27$이면 $[\sqrt[3]{n}]=2$

$27\leqq n\leqq 36$이면 $[\sqrt[3]{n}]=3$

$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+\cdots+[\sqrt[3]{36}]$

$=1\times 7+2\times 19+3\times 10=75$ (참)

ㄷ. $1\leqq a\leqq 10$이면 $1\leqq[\sqrt{a}]\leqq 3$이다.

$[\sqrt{10}]=3$이므로

(ⅰ) $[\sqrt{a}]=1$, $[\sqrt{10-a}]=2$인 경우

$[\sqrt{a}]=1$이면 $1\leqq\sqrt{a}<2$이므로 $1\leqq a<4$

$[\sqrt{10-a}]=2$이면 $2\leqq\sqrt{10-a}<3$이므로

$1<a\leqq 6$

$\therefore$ $1<a<4$에서 $a=2,\ 3$

(ⅱ) $[\sqrt{a}]=2$, $[\sqrt{10-a}]=1$인 경우

같은 방법으로 $6<a<9$ $\therefore$ $a=7,\ 8$

(ⅲ) $[\sqrt{a}]=3$, $[\sqrt{10-a}]=0$인 경우

같은 방법으로 $9<a\leqq 10$ $\therefore$ $a=10$

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$a=2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 10$이다. (참)

답 ④

13. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

[해설] n 행의 마지막 카드는 그림에서 2^n-1 번째 항이므로 10 행의 첫 번째 카드는 512 항이고 마지막 카드는 1023 항이다. 이 때 카드의 배열은 9 개씩 반복되므로 9 로 나누어보면

$512=9\times 56+8$이고 $1023=9\times 113+6$이므로

$a=2$, $b=4$이다.

답 ①

14. [출제의도] 등비수열의 뜻을 알기

[해설] α, n, x가 등비수열이므로 $\dfrac{\alpha}{n}=\boxed{\dfrac{n}{x}}$

한편, $n\neq 0$, $\alpha\neq 0$이므로

$1\leqq n<\dfrac{n}{\alpha}=\dfrac{1}{\boxed{\frac{n}{x}}}=\dfrac{n+\alpha}{n}=1+\boxed{\dfrac{\alpha}{n}}<2$

$\therefore$ $n=1$

따라서, $n=1$을 $\dfrac{\alpha}{n}=\dfrac{n}{x}$에 대입하여 x의 값을 구하면 $x=\boxed{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$이다.

답 ③

15. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수 구하기

[해설] A, L을 한 문자로 생각하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{2!2!}=180$

또한, A, L를 서로 바꾸는 경우의 수가 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $180\times 2=360$

답 ④

16. [출제의도] 무한수열과 무한급수의 극한 이해하기

[해설] ㄱ. (반례) 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$로 수렴하지 않는다. (거짓)

ㄴ. (참)

ㄷ. (반례) $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $b_n=2^n$ 이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$이 되어 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이다. (거짓)

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}b_n=p$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=q$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n\times\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=pq$

이므로 수렴한다. (참)

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

답 ③

17. [출제의도] 경우의수 구하기

[해설] A의 공집합이 아닌 부분집합은

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, …, $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2^9\}$이다.

따라서, 각 부분집합의 원소의 합의 최소값은 1이고 최대값은 $1+2+2^2+\cdots+2^9=1023$이다.

A의 각 부분집합의 원소의 합은 1부터 1023까

지의 자연수를 모두 나타낼 수 있다.

즉, {1}, {2}, {1, 2}, {2^2}, {1, 2^2}, …

⇕ ⇕ ⇕ ⇕ ⇕

1 2 3 4 5 …

∴ 원소의 합이 3의 배수인 부분집합의 개수는 341 개이다.

답 ②

18. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 문제 해결하기

[해설] (ⅰ) 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$$\overline{M_1M_2}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$$

$$\overline{M_3M_4}=\frac{1}{2}\overline{M_1M_2}=1$$

$$\overline{M_5M_6}=\frac{1}{2}\overline{M_3M_4}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\overline{M_1M_2}+\overline{M_3M_4}+\overline{M_5M_6}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

(ⅱ) 삼각형의 중점연결정리에 의하여

$$\overline{M_2M_3}=\frac{1}{2}\overline{CM_1}=2$$

$$\overline{M_4M_5}=\frac{1}{2}\overline{M_2M_3}=1$$

$$\overline{M_6M_7}=\frac{1}{2}\overline{M_4M_5}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\overline{M_2M_3}+\overline{M_4M_5}+\overline{M_6M_7}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

(ⅲ) △ABC 에서 $\cos B=\frac{4^2+8^2-6^2}{2\cdot4\cdot8}=\frac{11}{16}$ 이므로

$$\overline{AM_1}^{\,2}=16+16-32\cos B=10$$

$$\therefore\ \overline{AM_1}=\sqrt{10}$$

따라서, (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)으로부터

$$\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3}+\cdots=8+\sqrt{10}$$

답 ⑤

19. [출제의도] 행렬의 곱셈과 역행렬을 활용한 문제 해결하기

[해설] $A\begin{pmatrix}2&1\\3&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&12\\3&11\end{pmatrix}$ 이므로

$$A=\begin{pmatrix}5&12\\3&11\end{pmatrix}\frac{1}{19}\begin{pmatrix}11&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ 이다.

이 때, 갑이 1, 2단계를 통해 얻은 행렬을 $\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&17\\7&8\end{pmatrix}$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15&17\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&9\\7&8\end{pmatrix}$$

따라서, 갑이 입력한 단어는 'high'이다.

답 ②

20. [출제의도] 지수부등식과 로그부등식 풀기

[해설] $(\log_2 x)^2-\log_2 x^2<3$ (단, $x>0$)에서

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3<0$

$-1<\log_2 x<3$

$\therefore\ \frac{1}{2}<x<8$ …㉠

또한, $4^x-2^{x+2}\leqq32$에서

$(2^x)^2-4\cdot2^x-32\leqq0$

$0<2^x\leqq8$ ($\because\ 2^x>0$)

$\therefore\ x\leqq3$ …㉡

따라서, ㉠, ㉡으로부터 $\frac{1}{2}<x\leqq3$ 을 만족하는 정수 x는 1, 2, 3이다.

∴ 모든 정수 x값들의 합은 6 이다.

답 ④

21. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

[해설]

$a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=9$, $a_5=12$, …에서

$\{a_{2n-1}\}$이 계차수열이 되므로

$$a_{2n-1}=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$$

$$=2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+2n-2$$

$$=n(n+1)$$

이 때, $2n-1=25$에서 $n=13$이므로

$a_{25}=13\times14=182$

답 ③

22. [출제의도] 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈하기

[해설]

$A=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3&1\\0&-1\end{pmatrix}$이므로

$AB=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\-3&-2\end{pmatrix}$

$\therefore\ |ad-bc|=3$

답 3

23. [출제의도] 등차수열과 등비수열의 뜻을 알기

[해설] $f(n)$은 등차수열이므로 $f(n)=3n+8$

$g(n)$은 등비수열이므로 $g(n)=5^n$

$(f\circ g)(k)=f(5^k)=3\cdot5^k+8=383$에서

$k=3$이므로

$\therefore\ 20k=60$

답 60

24. [출제의도] 지수의 법칙을 이해하기

[해설] 분자, 분모에 a^{4x}을 곱하면

$\frac{a^{4x}(a^x+a^{2x}+a^{3x})}{a^x+a^{2x}+a^{3x}}=a^{4x}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ 에서

$m=1$, $n=2$이므로

$\therefore\ 100m+n=102$

답 102

25. [출제의도] 조합의 수 구하기

[해설] 8 개의 숫자에서 서로 다른 4 개의 숫자를 선택하는 조합의 수이므로

${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$개

답 70

26. [출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

[해설] $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ 에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=-1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=3$

따라서 $\lim_{n\to\infty}100b_n=300$

답 300

27. [출제의도] 이차정사각행렬의 역행렬 구하기

[해설] $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$이므로

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

이 때,

$A+A^{-1}=\begin{pmatrix}2\cos\theta&0\\0&2\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0\\0&\sqrt{3}\end{pmatrix}$

이므로 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (단, $0<\theta<\pi$) ∴ $\theta=\frac{\pi}{6}$

따라서, $\frac{\pi}{\theta}=6$ 이다.

답 6

28. [출제의도] 경우의 수 구하기

[해설] $a+b+c+abc$가 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $a+b+c$: 짝수, abc :홀수

$a+b+c$가 짝수인 경우는

(a,b,c) = (짝,짝,짝), (짝,홀,홀),(홀,짝,홀),(홀,홀,짝)

으로 abc는 모두 짝수이다. 따라서 조건에 모순이므로 구하는 경우의 수는 없다.

(ⅱ) $a+b+c$: 홀수, abc :짝수

$a+b+c$가 홀수인 경우는

(a,b,c) = (짝,짝,홀), (짝,홀,짝),(홀,짝,짝),(홀,홀,홀)

의 4가지이다.

이 때, (a,b,c) = (짝,짝,홀)인 경우는

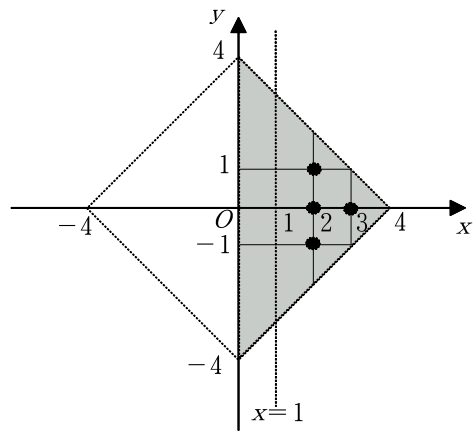
$3\times3\times3=27$ (가지)이고 (짝,홀,짝),(홀,짝,짝) 이 모두 같은 경우이므로 $27\times3=81$ (가지)이다. 한편, (a,b,c) = (홀,홀,홀)인 경우는 abc가 짝수이라는 조건에 모순이므로 구하는 경우의 수는 없다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의해서 81(가지)이다.

답 81

29. [출제의도] 로그의 뜻 이해하기

[해설] $x>0$, $x\neq1$, $4-|x|-|y|>0$이므로 점(x, y)가 나타내는 영역은 그림과 같다.(경계선 제외)



이 때, x, y좌표가 모두 정수인 점(x, y)의 개수는 4 개이다.

답 4

30. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 이해하여 활용하기

[해설] $\log_{10}7^{30}=30\times0.85=25.50$

$\log_{10}2=0.30$, $\log_{10}3=0.48$이므로

$\log_{10}3<0.5<\log_{10}4$

양변에 25 를 더하여 정리하면

$\log_{10}(3\times10^{25})<25.5=\log_{10}7^{30}<\log_{10}(4\times10^{25})$

$\therefore\ 3\times10^{25}<7^{30}<4\times10^{25}$

$\therefore\ a=3$, $b=25$

따라서, $a+b=28$ 이다.

답 28

〔나 형〕

1	①	*2*	②	*3*	⑤	*4*	②	*5*	①
6	②	*7*	⑤	*8*	②	*9*	④	*10*	③
11	⑤	*12*	④	*13*	①	*14*	③	*15*	③
16	③	*17*	④	*18*	⑤	*19*	②	*20*	①
21	③	*22*	3	*23*	60	*24*	102	*25*	23
26	25	*27*	36	*28*	396	*29*	4	*30*	450

1. 수리'가'형 1번과 같음
2. 수리'가'형 2번과 같음
3. 수리'가'형 3번과 같음
4. 수리'가'형 4번과 같음

5. [출제의도] 지수의 법칙을 이해하고 활용하기

[해설] $\log_{10}a=m \Leftrightarrow 10^m=a$

$\log_{10}b=n \Leftrightarrow 10^n=b$이므로

$10^{m-2n}=10^m\cdot10^{-2n}=10^m(10^n)^{-2}$

$=ab^{-2}=\frac{a}{b^2}$

(별해) $m-2n=\log_{10}a-2\log_{10}b$

$=\log_{10}\frac{a}{b^2}$

$\therefore\ 10^{m-2n}=10^{\log_{10}\frac{a}{b^2}}=\frac{a}{b^2}$

답 ①

6. [출제의도] 행렬의 덧셈, 뺄셈, 곱셈하기

[해설] $AX=B-A$이고

$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&2\\-1&-1\end{pmatrix}$이므로

$X=A^{-1}(B-A)$

$X=\begin{pmatrix}3&2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&11\\-5&-6\end{pmatrix}$

$\therefore$ X의 모든 성분의 합은 11

답 ②

7. 수리'가'형 7번과 같음

8. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

[해설] $a_1 = S_1 = 2$

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n-1$ (단, $n \geqq 2$)이므로

수열 $\{a_n\}$은 2, 3, 5, 7, … 이다. 따라서,

$$\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \sum_{k=2}^{7} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{7} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{15} \right) \right\}$$

$$= \frac{3}{10}$$

답 ②

9. [출제의도] 지표의 성질을 이해하고 활용하기

[해설] $3^{-30} \times 2^{30} = \left(\frac{2}{3} \right)^{30}$

$\log_{10} \left(\frac{2}{3} \right)^{30} = 30(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = -5.4 = \overline{6}.6$

$\log_{10} \left(\frac{2}{3} \right)^{30}$의 지표가 -6이므로 소수점 아래 6번째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore$ $m = 6$

답 ④

10. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

[해설] 주어진 수열의 점화식을 이용하여 몇 개의 항을 구하면

1, 2, 1, -1, -2, -1, 1, 2, … 이다.

따라서, 주어진 수열은 6개 항을 주기로 반복되고

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2005} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_6)$

$+ \cdots + (a_{1999} + a_{2000} + \cdots + a_{2004}) + a_{2005}$

$= a_{2005} = a_1 = 1$

답 ③

11. 수리'가'형 11번과 같음

12. 수리'가'형 12번과 같음

13. 수리'가'형 13번과 같음

14. 수리'가'형 14번과 같음

15. [출제의도] 역행렬의 뜻을 알고 활용하기

[해설] A, $A+E$의 역행렬이 모두 존재하지 않으므로 $ab+1=0$, $(a+1)(b+1)+1=0$이다.

ㄱ. $a+b=-1$이다. (참)

ㄴ. $(a-1)(b-1)+1 = ab-(a+b)+2 = 2 \neq 0$이므로 $A-E$역행렬은 항상 존재한다. (참)

ㄷ. $A^2 + A = O$이므로

$A + A^2 + \cdots + A^{10}$

$= (A+A^2) + A^2(A+A^2) + \cdots + A^8(A+A^2) = O$

이다. (거짓)

답 ③

16. [출제의도] 가수의 성질을 이해하고 활용하기

[해설] $\log_{10} x$의 지표는 2이므로

$\log_{10} x = 2 + \alpha$ (단, $0 < \alpha < 1$)라 하면

$\log_{10} \frac{1}{x} = -\log_{10} x = -2 - \alpha = -3 + (1 - \alpha)$

이 때, 주어진 조건으로부터 $\alpha = 2(1-\alpha)$

$\therefore \alpha = \frac{2}{3}$

따라서, $\log_{10} x = \frac{8}{3}$이므로

(준식) $= (1 + 2 + \cdots + 9) \log_{10} x = 45 \log_{10} x = 120$

답 ③

17. [출제의도] 행렬의 곱셈을 알고 문제 해결하기

[해설] $A^{n+1} = A^n A$이므로

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_n + 2b_n \\ c_n & c_n + 2d_n \end{pmatrix}$$

$a_n = a_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$, $c_n = c_1 = 0$, $d_{n+1} = 2d_n$

으로부터 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$이다. 따라서,

$a_n + b_n + c_n + d_n = 2^{n+1} \geqq 2005$이므로 $n \geqq 10$

$\therefore$ 자연수 n의 최소값은 10

답 ④

18. [출제의도] 로그의 성질을 알고 활용하기

[해설] $a+b=3$, $ab=1$이므로

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 9 - 2 = 7$

답 ⑤

19. 수리'가'형 19번과 같음

20. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

[해설] $a_{n+1} = 2a_n + 1$

$\Leftrightarrow$ $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$이므로

$a_n + 1 = b_n$이라 하면

$b_{n+1} = 2b_n$ … ㉠

이 때, ㉠에 $n = 1, 2, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 정리하면 $b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$ ($\because$ $b_1 = 4$)

따라서, $a_n = 2^{n+1} - 1$

$\therefore$ $a_{99} = 2^{100} - 1$이므로

(준식) $= \log_4 2^{100} = 50$

답 ①

21. 수리'가'형 21번과 같음

22. 수리'가'형 22번과 같음

23. 수리'가'형 23번과 같음

24. 수리'가'형 24번과 같음

25. [출제의도] 역행렬의 뜻을 알기

[해설] $A + kE = \begin{pmatrix} k+1 & 1 \\ 3 & k+4 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(k+1)(k+4) - 3 = k^2 + 5k + 1 = 0$

따라서, $k + \frac{1}{k} = -5$

$k^2 + \frac{1}{k^2} = \left(k + \frac{1}{k} \right)^2 - 2 = 23$

답 23

26. [출제의도] 등차수열의 뜻을 알고 일반항 구하기

[해설] 수열 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$이 등차수열이므로 공차를 d라 하면 $\frac{1}{10} = \frac{1}{a_1} + 4d$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{a_1} + 9d$

$\therefore$ $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{50}$, $d = \frac{1}{50}$

$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{50} + \frac{1}{50} = \frac{1}{25}$

$\therefore$ $a_2 = 25$

답 25

27. [출제의도] 역행렬을 이용하여 연립일차방정식의 문제 해결하기

[해설]

$\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 3 & b-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$이 $x = y = 0$이외의 해를 가지므로 $(a-1)(b-2) = 6$이다.

$a-1$	1	2	3	6
$b-2$	6	3	2	1
a	2	3	4	7
b	8	5	4	3
ab	16	15	16	21

따라서, $M = 21$, $m = 15$이다.

$\therefore$ $M + m = 36$

답 36

28. [출제의도] Σ의 뜻과 성질을 이해하고 활용하기

[해설] $\sum_{i=1}^{6} \left(\sum_{j=1}^{6} a_i b_j \right) = \sum_{i=1}^{6} \left(a_i \sum_{j=1}^{6} b_j \right)$

$= \sum_{i=1}^{6} \left(a_i \left(2 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} - 36 \right) \right)$

$= 6 \sum_{i=1}^{6} a_i = 6 \left\{ \frac{2(2^6 - 1)}{2 - 1} - 60 \right\}$

$= 396$

답 396

29. 수리'가'형 29번과 같음

30. [출제의도] 상용로그의 값 구하기

[해설] $10^9 = 2^9 \times 5^9$이므로 10^9의 양의 약수는 100개다.

양의 약수를 크기순으로 a_1, a_2, a_3, …, a_{100}이라 하면 $a_i a_j = 10^9$ ($i+j = 101$, $i = 1, 2, 3, \cdots, 100$)이므로 모든 양수의 곱 $N = (10^9)^{50} = 10^{450}$이다.

$\therefore$ $\log_{10} N = \log_{10} 10^{450} = 450$

답 450