# • 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 16개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

## 정 답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ① | 3 | ② | 4 | ⑤ | 5 | ④ |
| 6 | ① | 7 | ③ | 8 | ④ | 9 | ⑤ | 10 | ③ |
| 11 | ② | 12 | ④ | 13 | ③ | 14 | ① | 15 | ④ |
| 16 | 69 | 17 | 15 | 18 | 7 | 19 | 62 | 20 | 27 |
| 21 | 3 | 22 | 202 | | | | | | |

## 해 설

**1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.**

$\sqrt[3]{2}\times 4^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$

**2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.**

$f'(x)=3x^2+3$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 3+3 = 6$

**3. [출제의도] 등비수열의 정의를 이해하여 항의 값을 구한다.**

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$\frac{a_2a_3}{a_1a_2} = \frac{a_1r\times a_1r^2}{a_1\times a_1r} = r^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4,\ r=2$

$a_1a_2 = a_1^2\times 2 = \frac{1}{2},\ a_1^2 = \frac{1}{4},\ a_1 = \frac{1}{2}\,(a_1>0)$

따라서 $a_4 = a_1r^3 = \frac{1}{2}\times 2^3 = 4$

**4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.**

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-}(x^2-3x) = a^2-3a,\ f(a)=a-4$

이므로 $a^2-3a = a-4,\ (a-2)^2=0$

따라서 $a=2$

**5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.**

$f'(x)=x^2+3x+1+(x+1)(2x+3)$ 이므로

$f'(2)=11+21=32$

**6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.**

$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2,\ \sin^2\theta = 2\cos^2\theta$

$1-\cos^2\theta = 2\cos^2\theta,\ \cos^2\theta = \frac{1}{3}$

$\theta$는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

따라서 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**7. [출제의도] 정적분을 이해하여 두 곡선 사이의 넓이를 구한다.**

$\frac{1}{2}x^2+2 > -\frac{1}{4}x^2-1$ 이므로 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^2\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-\left(-\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$

$= \int_0^2\left(\frac{3}{4}x^2+3\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^3+3x\right]_0^2 = 8$

**8. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.**

$\log_a b = 2$ 이므로 $b=a^2$

$\log_2 a+\log_4 b = \log_2 a+\log_4 a^2 = \log_2 a+\log_2 a = 8$

$\log_2 a = 4,\ a=2^4,\ b=a^2=(2^4)^2=2^8$

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{2^8}{2^4} = 2^4 = 16$

**9. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하여 실수의 값을 구한다.**

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = 5$ …… ㉠

이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)(x-3)\}=0$에서 $f(a)(a-3)=0$

( i ) $a=3$인 경우

㉠에서 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5$이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)=0$

그러므로 $f(x)=(x-3)(x-b)$ ($b$는 실수)이다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to 3}(x-b) = 3-b=5,\ b=-2$

이므로 $f(x)=(x-3)(x+2)$

( ii ) $a\neq 3$이고 $f(a)=0$인 경우

$f(x)=(x-a)(x-c)$ ($c$는 실수)이다.

㉠에서 $\lim_{x\to a}\frac{(x-c)(x-3)}{x-a}=5$이므로

$\lim_{x\to a}\{(x-c)(x-3)\} = (a-c)(a-3)=0,\ a=c$

이다. 그러므로 $f(x)=(x-a)^2$이고 ㉠에서

$\lim_{x\to a}(x-3) = a-3=5,\ a=8$

그러므로 $f(x)=(x-8)^2$

( i ), ( ii )에서 구하는 모든 실수 $a$의 값은 3, 8

따라서 $3+8=11$

**10. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하여 자연수의 합을 구한다.**

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$라 하자.

$a_2+a_9 = (18+d)+(18+8d)=0$ 이므로 $d=-4$

$S_k = \frac{k\{36+(k-1)\times(-4)\}}{2} = -2k^2+20k$

$|S_k|=48$에서 $S_k=48$ 또는 $S_k=-48$

( i ) $S_k=48$인 경우

$-2k^2+20k=48,\ k^2-10k+24=0$

$(k-4)(k-6)=0$이므로 $k=4$ 또는 $k=6$

( ii ) $S_k=-48$인 경우

$-2k^2+20k=-48,\ k^2-10k-24=0$

$(k-12)(k+2)=0,\ k$가 자연수이므로 $k=12$

( i ), ( ii )에서 구하는 모든 자연수 $k$의 값은

4, 6, 12

따라서 $4+6+12=22$

**11. [출제의도] 정적분을 이용하여 점의 위치와 움직인 거리를 구하는 문제를 해결한다.**

ㄱ. 시각 $t=4$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$v(4)=16-4(a+5)+8=0$

$-4a+4=0,\ a=1$ (참)

ㄴ. $v(t)=t^2-6t+8$이므로

시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$\int_0^3(t^2-6t+8)dt = \left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^3 = 6$ (참)

ㄷ. $v(t)=t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$이므로

시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4|v(t)|dt = \int_0^2 v(t)dt+\int_2^4(-v(t))dt$

$= \int_0^2(t^2-6t+8)dt+\int_2^4(-t^2+6t-8)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_2^4$

$=8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

**12. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.**

$A(k,\ a^k)$, $B(k+2,\ a^{k+2})$, $C(k,\ a^{k-2})$, $D(k+2,\ a^k)$

$\overline{AC}=\overline{AD}$이고 $\overline{AD}=2$이므로 $\overline{AC}=2$

$\overline{AC}+\overline{BD}=6$이므로 $\overline{BD}=4$

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{a^{k+2}-a^k}{a^k-a^{k-2}} = a^2 = \frac{4}{2} = 2,\ a=\sqrt{2}\,(a>1)$

$\overline{AC}=2$에서

$(\sqrt{2})^k-(\sqrt{2})^{k-2}=2,\ (\sqrt{2})^{k-2}\times\{(\sqrt{2})^2-1\}=2,$

$(\sqrt{2})^{k-2}=2,\ k=4$

따라서 $a\times k = 4\sqrt{2}$

**13. [출제의도] 도함수를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.**

$f'(0)=1$이므로 다항함수 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

함수 $f(x)$의 차수가 1이면 함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$는 상수함수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 차수를 $n\,(n\geq 2)$라 하면

함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$의 차수는 $2n-2$이므로

$n=2n-2,\ n=2$

실수 $a\,(a\neq 0)$, $b$, $c$에 대하여

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=2ax+b$이고 $f'(0)=1$이므로 $b=1$

$(f'(x)+2)(f'(x)-2) = (2ax+3)(2ax-1)$

$= 4a^2x^2+4ax-3$

모든 실수 $x$에 대하여

$ax^2+x+c = 4a^2x^2+4ax-3$이므로 $a=\frac{1}{4},\ c=-3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x-3$이므로 $f(4)=5$

**14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 도형에 관한 문제를 해결한다.**

$\cos(\angle DCB)=\frac{1}{3}$에서 $\sin(\angle DCB)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle DCB)} = 2\times 3,\ \overline{BD}=\boxed{4\sqrt{2}}$이므로

(가)에 알맞은 수는 $4\sqrt{2}$

사각형 ABCD에서

$\angle BAD=\pi-\angle DCB$이므로 $\cos(\angle BAD)=-\frac{1}{3}$

$\overline{AB}=3k,\ \overline{AD}=k\,(k>0)$이라 하면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$(4\sqrt{2})^2 = (3k)^2+k^2-2\times 3k\times k\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$32=12k^2,\ k=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\overline{AD}=\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}},\ \overline{AB}=3\times\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

이므로 (나)에 알맞은 수는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$(4\sqrt{2})^2 = \overline{CB}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\frac{1}{3}$

$32=\frac{4}{3}\overline{CB}^2,\ \overline{CB}=\overline{CD}=\boxed{2\sqrt{6}}$

이므로 (다)에 알맞은 수는 $2\sqrt{6}$

따라서 $p=4\sqrt{2},\ q=\frac{2\sqrt{6}}{3},\ r=2\sqrt{6}$이므로

$\frac{q\times r}{p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\times 2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

**15. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 함수를 추론한다.**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$

조건 (가)에서

$f'(1)\times(x-1)+f(1)=f'(4)\times(x-4)+f(4)$

가 $x$에 대한 항등식이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선은

서로 같다.
이 접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하면
$m=f'(1)=f'(4)$,
$n=f(1)-f'(1)=f(4)-4f'(4)$
$h(x)=f(x)-(mx+n)$ 이라 하면
$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고
$h'(x)=f'(x)-m$
$h(1)=f(1)-m-n=0$,
$h'(1)=f'(1)-m=0$
이므로 $h(x)$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지고,
$h(4)=f(4)-4m-n=0$,
$h'(4)=f'(4)-m=0$
이므로 $h(x)$ 는 $(x-4)^2$ 으로 나누어떨어진다.
그러므로 $h(x)=(x-1)^2(x-4)^2$ 이다.
$f(x)=(x-1)^2(x-4)^2+mx+n$
$\quad=x^4-10x^3+33x^2+(m-40)x+n+16$
에서 $a=33$, $b=m-40$, $n=-16$ 즉,
$f(x)=x^4-10x^3+33x^2+bx$,
$f'(x)=4x^3-30x^2+66x+b$
조건 (나)에서 $g(0)=0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=0$ 이 되는 실수 $\alpha$ 가 존재한다.
$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$ 이므로
$f(x)$ 는 $(x-\alpha)^2$ 으로 나누어떨어진다.
$\alpha=0$ 즉, $f'(0)=0$ 이면 $b=0$ 이고
$f(x)=x^4-10x^3+33x^2=x^2(x^2-10x+33)$
이때 $x^2-10x+33=(x-5)^2+8$ 이므로
$f\left(\frac{7}{2}\right)>0$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $\alpha\neq 0$ 이다.
한편 $f(x)$ 는 $x$ 로 나누어떨어지므로
$f(x)=x(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$ 이 되는 실수 $\beta$ 가 존재한다.
$x^4-10x^3+33x^2+bx$
$=x(x-\alpha)^2(x-\beta)$
$=x^4-(2\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+2\alpha\beta)x^2-\alpha^2\beta x$
에서 $2\alpha+\beta=10$, $\alpha^2+2\alpha\beta=33$ 이므로
$\alpha^2+2\alpha(10-2\alpha)-33=0$,
$3\alpha^2-20\alpha+33=0$,
$(3\alpha-11)(\alpha-3)=0$ 에서
$\alpha=\frac{11}{3}$ 또는 $\alpha=3$

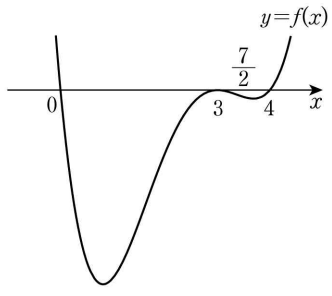
(ⅰ) $\alpha=\frac{11}{3}$ 인 경우

$\beta=\frac{8}{3}$ 이므로 $f(x)=x\left(x-\frac{11}{3}\right)^2\left(x-\frac{8}{3}\right)$

$f\left(\frac{7}{2}\right)>0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha=3$ 인 경우

$\beta=4$ 이므로 $f(x)=x(x-3)^2(x-4)$




$f\left(\frac{7}{2}\right)<0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $f(5)=5\times 2^2\times 1=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(5)=20$

**16. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 계산한다.**

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{7}a_k+7=30$ 이므로 $\sum_{k=1}^{7}a_k=23$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{7}3a_k=3\times\sum_{k=1}^{7}a_k=3\times 23=69$

**17. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.**

$F(x)=\int f(x)dx$
$\quad=\int(3x^2+4x-1)dx$
$\quad=x^3+2x^2-x+C$ ( $C$는 상수)
$F(0)=1$ 이므로 $C=1$
$F(x)=x^3+2x^2-x+1$
따라서 $F(2)=2^3+2\times 2^2-2+1=15$

**18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.**

$-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$ 이고
함수 $f(x)=4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+a$ 의 최솟값이 1이므로
$-4+a=1$, $a=5$
따라서
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+5$
$\quad=4\sin\frac{\pi}{6}+5$
$\quad=4\times\frac{1}{2}+5=7$

**19. [출제의도] 삼차함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.**

$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$
(ⅰ) $a>0$ 인 경우
닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

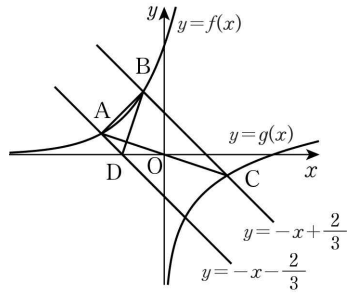
| $x$ | 0 | … | 1 | … | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 6 | ↘ | $-a+6$ | ↗ | $4a+6$ |

닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $4a+6$, $x=1$ 에서 최솟값 $-a+6$ 을 갖는다.
그러므로 $4a+6=8$, $-a+6=-2$
이다. 두 방정식을 동시에 만족시키는 $a$ 는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a<0$ 인 경우
닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 1 | … | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 6 | ↗ | $-a+6$ | ↘ | $4a+6$ |

닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $-a+6$, $x=2$ 에서 최솟값 $4a+6$ 을 갖는다.
그러므로 $-a+6=8$, $4a+6=-2$
$a=-2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$ 이므로
$f(x)=-4x^3+6x^2+6$
따라서 $f(-2)=-4\times(-2)^3+6\times(-2)^2+6=62$

**20. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.**




함수 $f(x)=\sqrt{3}a^x$ 의 역함수는 $g(x)=\log_a\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

두 직선 $y=-x-\frac{2}{3}$, $y=-x+\frac{2}{3}$ 가 평행하므로
$\angle ABC+\angle DAB=180°$
삼각형 CBA 와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로
$\angle ABC=\angle DAB$
그러므로
$\angle ABC=\angle DAB=90°$
양수 $k$에 대하여 점 A의 좌표를 $\left(-k-\frac{2}{3}, k\right)$라 하면 $\overline{AD}=\sqrt{2}k$
직선 AB의 기울기가 1이므로
점 B의 좌표는 $\left(-k, k+\frac{2}{3}\right)$
점 C의 좌표는 $\left(k+\frac{2}{3}, -k\right)$
$\overline{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\overline{BC}=\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}$
삼각형 CBA 와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로
$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DA}:\overline{AB}$
$\frac{2\sqrt{2}}{3}:\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}=\sqrt{2}k:\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$4k^2+\frac{4}{3}k=\frac{8}{9}$,
$9k^2+3k-2=0$, $(3k-1)(3k+2)=0$
$k>0$ 이므로 $k=\frac{1}{3}$
점 $A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$\frac{1}{3}=\sqrt{3}a^{-1}$, $a=3\sqrt{3}$
따라서 $a^2=27$

**21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.**

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가
$x=2$ 에서 극솟값 $\frac{5}{2}$ 를 가지므로
$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$
인 실수 $\alpha$ $(\alpha<2)$가 존재한다.
(ⅰ) $\alpha<0$ 인 경우
$t\ge 2$ 인 모든 실수 $t$ 에 대하여
$\int_0^t|f'(x)|dx$
$=\int_0^2(-f'(x))dx+\int_2^t f'(x)dx$
$=(-f(2)+f(0))+(f(t)-f(2))$
$=f(t)+f(0)-2f(2)$
에서
$f(t)+f(0)-2f(2)=f(t)+f(0)$, $f(2)=0$
이므로 $f(2)=\frac{5}{2}$ 임에 모순이다.
(ⅱ) $0\le\alpha<2$ 인 경우
$t\ge 2$ 인 모든 실수 $t$ 에 대하여
$\int_0^t|f'(x)|dx$
$=\int_0^\alpha f'(x)dx+\int_\alpha^2(-f'(x))dx+\int_2^t f'(x)dx$
$=(f(\alpha)-f(0))+(-f(2)+f(\alpha))+(f(t)-f(2))$
$=f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)$
에서
$f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)=f(t)+f(0)$,
$f(\alpha)-f(2)=f(0)$
$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$ 에서
$f(x)=x^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}x^2+6\alpha x+f(0)$
$f(\alpha)-f(2)=f(0)$ 이므로
$\alpha^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}\times\alpha^2+6\alpha\times\alpha+f(0)-\frac{5}{2}=f(0)$,
$\alpha^3-6\alpha^2+5=0$,
$(\alpha-1)(\alpha^2-5\alpha-5)=0$
$\alpha=1$ 또는 $\alpha=\frac{5-\sqrt{45}}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{5+\sqrt{45}}{2}$
$0\le\alpha<2$ 이므로 $\alpha=1$

( ⅰ ), ( ⅱ )에서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+f(0)$

$f(2)=2+f(0)=\frac{5}{2}$ 에서 $f(0)=\frac{1}{2}$ 이므로

$p=2$ , $q=1$

따라서 $p+q=3$

**22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.**

( ⅰ ) $a_3$ 이 짝수인 경우

$a_4=a_3+3$ 이고 이는 홀수이다.

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=\frac{1}{2}a_3+6$

$a_5$ 가 홀수이면 $a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$

$a_3=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$

즉, $a_3=\frac{34}{3}$ 가 되어 $a_3$ 이 자연수임에 모순이다.

$a_5$ 가 짝수이면 $a_6=a_5+5=\frac{1}{2}a_3+11$

$a_3=\frac{1}{2}a_3+11$ 즉, $a_3=22$

이때 $a_5=17$ 이 되어 $a_5$ 가 짝수임에 모순이다.

( ⅱ ) $a_3$ 이 홀수인 경우

① $a_3=8k-7$ ($k$는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k$,

$a_5=a_4+4=4k+4$,

$a_6=a_5+5=4k+9$

$8k-7=4k+9$ 즉, $k=4$ 이므로 $a_3=25$

$a_2$ 가 짝수이면 $a_2+2=25$, $a_2=23$ 이 되어

$a_2$ 가 짝수임에 모순이다.

$a_2$ 가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=25$, $a_2=45$

$a_1$ 이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=45$, $a_1=87$

$a_1$ 이 짝수이면 $a_1+1=45$, $a_1=44$

따라서 $a_1=87$ 또는 $a_1=44$

② $a_3=8k-5$ ($k$는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+1$,

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+5$,

$a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=k+8$

$8k-5=k+8$ 즉, $k=\frac{13}{7}$ 이 되어

$k$가 자연수임에 모순이다.

③ $a_3=8k-3$ ($k$는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+2$,

$a_5=a_4+4=4k+6$,

$a_6=a_5+5=4k+11$

$8k-3=4k+11$ 즉, $k=\frac{7}{2}$ 이 되어

$k$가 자연수임에 모순이다.

④ $a_3=8k-1$ ($k$는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+3$,

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+6$,

$a_6=a_5+5=2k+11$

$8k-1=2k+11$ 즉, $k=2$ 이므로 $a_3=15$

$a_2$ 가 짝수이면 $a_2+2=15$, $a_2=13$ 이 되어

$a_2$ 가 짝수임에 모순이다.

$a_2$ 가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=15$, $a_2=25$

$a_1$ 이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=25$, $a_1=47$

$a_1$ 이 짝수이면 $a_1+1=25$, $a_1=24$

따라서 $a_1=47$ 또는 $a_1=24$

( ⅰ ), ( ⅱ )에서 모든 $a_1$ 의 값은

87, 44, 47, 24 이다.

따라서 $87+44+47+24=202$

**[미적분]**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *23* | ⑤ | *24* | ① | *25* | ② | *26* | ③ | *27* | ④ |
| *28* | ③ | *29* | 155 | *30* | 29 | | | | |

**23. [출제의도] 로그함수의 극한값을 계산한다.**

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x^2)}{2x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}\times\frac{5}{2}\right)$

$=\frac{5}{2}\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+5x^2)}{5x^2}=\frac{5}{2}\times1=\frac{5}{2}$

**24. [출제의도] 적분법을 이해하여 적분값을 구한다.**

$\int_1^2\frac{x+1}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^2=\ln2+\frac{1}{2}$

**25. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.**

$\left(k\times a_n-n^2\right)^2<n^2$ 에서 $-n<k\times a_n-n^2<n$

$k>0$ 이므로 $\frac{n^2-n}{k}<a_n<\frac{n^2+n}{k}$

$\frac{1}{k}\times\frac{n^2-n}{4n^2+1}<\frac{a_n}{4n^2+1}<\frac{1}{k}\times\frac{n^2+n}{4n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\times\frac{n^2-n}{4n^2+1}\right)=\frac{1}{k}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4k}$,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k}\times\frac{n^2+n}{4n^2+1}\right)=\frac{1}{k}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4k}$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n^2+1}=\frac{1}{4k}$, $\frac{1}{4k}=k$

$k>0$ 이므로 $k=\frac{1}{2}$

**26. [출제의도] 적분법을 이해하여 입체도형의 부피를 구한다.**

$x$ 좌표가 $t\,(1\le t\le e)$ 인 점을 지나고 $x$ 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이 $S(t)$ 는

$S(t)=\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\sqrt{1+(\ln t)^2}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}\left((\ln t)^2+1\right)$

구하는 입체도형의 부피는

$\int_1^e S(t)\,dt=\frac{\pi}{8}\int_1^e\left((\ln t)^2+1\right)dt$

$=\frac{\pi}{8}\left(\int_1^e1\times(\ln t)^2dt+\int_1^e1\,dt\right)$

$=\frac{\pi}{8}\left(\left[t(\ln t)^2\right]_1^e-\int_1^e2\times\ln t\,dt+\int_1^e1\,dt\right)$

$=\frac{\pi}{8}\left(e-\left[2t\ln t\right]_1^e+\int_1^e2\,dt+\int_1^e1\,dt\right)$

$=\frac{\pi}{8}\left(-e+\left[3t\right]_1^e\right)=\frac{(2e-3)\pi}{8}$

**27. [출제의도] 미분법을 이해하여 역함수의 미분계수를 구한다.**

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로

$\lim_{x\to b-}(e^{2x}-2)=\lim_{x\to b+}(2e^x-8e^{-x}+a)$

$e^{2b}-2=2e^b-8e^{-b}+a$ …… ㉠

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 미분가능하므로

$\lim_{h\to0-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=2e^{2b}$

$\lim_{h\to0+}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}=2e^b+8e^{-b}$ 에서

$2e^{2b}=2e^b+8e^{-b}$, $\left(e^b-2\right)\left(e^{2b}+e^b+2\right)=0$

$e^b=2$ 이므로 $b=\ln2$

㉠에 $b=\ln2$ 를 대입하면 $a=2$

$g'(8)=\frac{1}{f'(g(8))}$ 에서 $g(8)=\alpha$ 라 하면 $f(\alpha)=8$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고

$f(\ln2)=2e^{\ln2}-8e^{-\ln2}+2=2$ 이므로 $\alpha>\ln2$

$f(\alpha)=2e^\alpha-8e^{-\alpha}+2=8$ 에서

$e^{2\alpha}-3e^\alpha-4=0$, $\left(e^\alpha-4\right)\left(e^\alpha+1\right)=0$

$e^\alpha=4$ 이므로 $\alpha=\ln4$

$f'(\ln4)=2e^{\ln4}+8e^{-\ln4}=10$ 이므로

$g'(8)=\frac{1}{f'(\ln4)}=\frac{1}{10}$

**28. [출제의도] 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.**

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\,f(s))$ 에서의

접선 $l$ 의 방정식은 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$

$f(x)=x\tan x-\ln(\sec x)$ 에서

$f'(x)=x\sec^2x$, $f''(x)=\sec^2x(1+2x\tan x)$

접선 $l$ 의 기울기가 $\frac{s}{t}$ 이므로 $f'(s)=\frac{s}{t}$

$s\sec^2s=\frac{s}{t}$, $t=\cos^2s$

$t=\cos^2s$ 의 양변을 $t$ 에 대하여 미분하면

$1=-2\sin s\cos s\times\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{-2\sin s\cos s}$

직선 $l$ 의 $y$절편은 $-sf'(s)+f(s)$ 이므로

$g(t)=-sf'(s)+f(s)$, $g'(t)=-sf''(s)\times\frac{ds}{dt}$

$t=\cos^2s\left(0<s<\frac{\pi}{2}\right)$ 에서 $t=\frac{1}{2}$ 일 때 $s=\frac{\pi}{4}$

$s=\frac{\pi}{4}$ 일 때, $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pi+2$, $\frac{ds}{dt}=-1$ 이므로

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}\times f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\frac{ds}{dt}=\frac{\pi^2+2\pi}{4}$

**29. [출제의도] 등비급수를 이용하여 급수의 값을 구하는 문제를 해결한다.**

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=k}^{\infty}b_n$ 이 수렴하므로 $-1<r<1$

조건 (가)에서 $r=\frac{b_4}{b_3}=\frac{a_{k+27}}{a_k}$ 이므로 $r$은 유리수이다.

$b_3=72r^2=2^3\times3^2\times r^2$, $b_4=72r^3=2^3\times3^2\times r^3$ 이고

$b_3$, $b_4$ 의 값이 모두 정수이므로 $r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d$라 하자.

( ⅰ ) $r=\frac{1}{2}$ 인 경우

$b_3=18$, $b_4=9$ 이므로 조건 (가)에서

$a_{k+27}-a_k=b_4-b_3$, $27d=-9$, $d=-\frac{1}{3}$

$d$는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

( ⅱ ) $r=-\frac{1}{2}$ 인 경우

$b_3=18$, $b_4=-9$ 이므로 조건 (가)에서

$a_{k+27}-a_k=b_4-b_3$, $27d=-27$, $d=-1$

( ⅰ ), ( ⅱ )에 의하여 $d=-1$, $r=-\frac{1}{2}$

조건 (가)에서 $a_{k+15}=a_k+15d=b_3+15d=3$

조건 (나)에서

$\frac{72\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=3$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{16}$, $k=5$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{k^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{72\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{5^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{72}{5}\times\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

$=\frac{\frac{72}{5}}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)}=\frac{144}{11}$

$p=11$, $q=144$ 이므로 $p+q=155$

**30. [출제의도] 적분법을 이용하여 함수를 추론한다.**

$g(f(x))=(-\sin(ax)+1)^2=(\sin(ax)-1)^2$ 에서

$g'(f(x))f'(x)=2a(\sin(ax)-1)\cos(ax)$

$a>0$ 이고 $\sin(ax)-1\le 0$ 이므로

$\cos(ax)\le 0$ 일 때 $\left|g'(f(x))f'(x)\right|=g'(f(x))f'(x)$

$\cos(ax)\ge 0$ 일 때 $\left|g'(f(x))f'(x)\right|=-g'(f(x))f'(x)$

$0\le x\le \dfrac{\pi}{2a}$ 에서 $\cos(ax)\ge 0$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2a}}g'(f(x))f'(x)\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2a}}(g(f(x)))'dx$$

$$=-\Big[g(f(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2a}}=g(f(0))-g\left(f\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right)=1$$

$\dfrac{\pi}{2a}\le x\le \dfrac{\pi}{a}$ 에서 $\cos(ax)\le 0$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}g'(f(x))f'(x)\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}(g(f(x)))'\,dx$$

$$=\Big[g(f(x))\Big]_{\frac{\pi}{2a}}^{\frac{\pi}{a}}=g\left(f\left(\frac{\pi}{a}\right)\right)-g\left(f\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right)=1$$

실수 $t$ 에 대한 함수 $\int_0^t\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx=1$, $\int_0^{\frac{\pi}{a}}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx=2$

이고 $\int_0^{2\pi}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx=\dfrac{5}{4}$ 이므로 $\dfrac{\pi}{2a}<2\pi<\dfrac{\pi}{a}$

즉 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$

$$\int_0^{2\pi}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2a}}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx+\int_{\frac{\pi}{2a}}^{2\pi}\left|g'(f(x))f'(x)\right|dx$$

$$=1+\int_{\frac{\pi}{2a}}^{2\pi}g'(f(x))f'(x)\,dx$$

$$=1+\Big[g(f(x))\Big]_{\frac{\pi}{2a}}^{2\pi}$$

$$=1+g(f(2\pi))-g\left(f\left(\frac{\pi}{2a}\right)\right)$$

$$=1+(\sin(2a\pi)-1)^2=\frac{5}{4}$$

$\sin(2a\pi)=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$ 이므로 $a=\dfrac{5}{12}$

$\int_b^{b+1}f(g(x))g'(x)\,dx$ 에서 $g(x)=s$ 로 놓으면

$x=b$ 일 때 $s=0$, $x=b+1$ 일 때 $s=1$ 이고,

$g'(x)=\dfrac{ds}{dx}$ 이므로

$$\int_b^{b+1}f(g(x))g'(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 f(s)\,ds=\left[\frac{1}{a}\cos(as)+(b+1)s\right]_0^1$$

$$=\frac{\cos a}{a}+(b+1)-\frac{1}{a}=\frac{\cos a}{a}$$

$b=-1+\dfrac{1}{a}=\dfrac{7}{5}$

$f(x)=-\sin\left(\dfrac{5}{12}x\right)+\dfrac{12}{5}$ 이므로

$f(2\pi)=-\sin\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{12}{5}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{12}{5}=\dfrac{19}{10}$

$p=10$, $q=19$ 이므로 $p+q=29$