• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 16개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	②	2	①	3	②	4	⑤	5	④
6	①	7	③	8	④	9	⑤	10	③
11	②	12	④	13	③	14	①	15	④
16	69	17	15	18	7	19	62	20	27
21	3	22	202						

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$\sqrt[3]{2}\times 4^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=3x^2+3$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 3+3 = 6$

3. [출제의도] 등비수열의 정의를 이해하여 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$\frac{a_2a_3}{a_1a_2} = \frac{a_1r\times a_1r^2}{a_1\times a_1r} = r^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4,\ r=2$

$a_1a_2 = a_1^2\times 2 = \frac{1}{2},\ a_1^2 = \frac{1}{4},\ a_1 = \frac{1}{2}\,(a_1>0)$

따라서 $a_4 = a_1r^3 = \frac{1}{2}\times 2^3 = 4$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-}(x^2-3x) = a^2-3a,\ f(a)=a-4$

이므로 $a^2-3a = a-4,\ (a-2)^2=0$

따라서 $a=2$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=x^2+3x+1+(x+1)(2x+3)$ 이므로

$f'(2)=11+21=32$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2,\ \sin^2\theta = 2\cos^2\theta$

$1-\cos^2\theta = 2\cos^2\theta,\ \cos^2\theta = \frac{1}{3}$

θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

따라서 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 두 곡선 사이의 넓이를 구한다.

$\frac{1}{2}x^2+2 > -\frac{1}{4}x^2-1$ 이므로 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^2\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-\left(-\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$

$= \int_0^2\left(\frac{3}{4}x^2+3\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^3+3x\right]_0^2 = 8$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$\log_a b = 2$ 이므로 $b=a^2$

$\log_2 a+\log_4 b = \log_2 a+\log_4 a^2 = \log_2 a+\log_2 a = 8$

$\log_2 a = 4,\ a=2^4,\ b=a^2=(2^4)^2=2^8$

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{2^8}{2^4} = 2^4 = 16$

9. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하여 실수의 값을 구한다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = 5$ …… ㉠

이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)(x-3)\}=0$에서 $f(a)(a-3)=0$

(i) $a=3$인 경우

㉠에서 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5$이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)=0$

그러므로 $f(x)=(x-3)(x-b)$ (b는 실수)이다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to 3}(x-b) = 3-b=5,\ b=-2$

이므로 $f(x)=(x-3)(x+2)$

(ii) $a\neq 3$이고 $f(a)=0$인 경우

$f(x)=(x-a)(x-c)$ (c는 실수)이다.

㉠에서 $\lim_{x\to a}\frac{(x-c)(x-3)}{x-a}=5$이므로

$\lim_{x\to a}\{(x-c)(x-3)\} = (a-c)(a-3)=0,\ a=c$

이다. 그러므로 $f(x)=(x-a)^2$이고 ㉠에서

$\lim_{x\to a}(x-3) = a-3=5,\ a=8$

그러므로 $f(x)=(x-8)^2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a의 값은 3, 8

따라서 $3+8=11$

10. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하여 자연수의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_2+a_9 = (18+d)+(18+8d)=0$ 이므로 $d=-4$

$S_k = \frac{k\{36+(k-1)\times(-4)\}}{2} = -2k^2+20k$

$|S_k|=48$에서 $S_k=48$ 또는 $S_k=-48$

(i) $S_k=48$인 경우

$-2k^2+20k=48,\ k^2-10k+24=0$

$(k-4)(k-6)=0$이므로 $k=4$ 또는 $k=6$

(ii) $S_k=-48$인 경우

$-2k^2+20k=-48,\ k^2-10k-24=0$

$(k-12)(k+2)=0,\ k$가 자연수이므로 $k=12$

(i), (ii)에서 구하는 모든 자연수 k의 값은

4, 6, 12

따라서 $4+6+12=22$

11. [출제의도] 정적분을 이용하여 점의 위치와 움직인 거리를 구하는 문제를 해결한다.

ㄱ. 시각 $t=4$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$v(4)=16-4(a+5)+8=0$

$-4a+4=0,\ a=1$ (참)

ㄴ. $v(t)=t^2-6t+8$이므로

시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$\int_0^3(t^2-6t+8)dt = \left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^3 = 6$ (참)

ㄷ. $v(t)=t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$이므로

시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4|v(t)|dt = \int_0^2 v(t)dt+\int_2^4(-v(t))dt$

$= \int_0^2(t^2-6t+8)dt+\int_2^4(-t^2+6t-8)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_2^4$

$=8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

12. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$A(k,\ a^k)$, $B(k+2,\ a^{k+2})$, $C(k,\ a^{k-2})$, $D(k+2,\ a^k)$

$\overline{AC}=\overline{AD}$이고 $\overline{AD}=2$이므로 $\overline{AC}=2$

$\overline{AC}+\overline{BD}=6$이므로 $\overline{BD}=4$

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{a^{k+2}-a^k}{a^k-a^{k-2}} = a^2 = \frac{4}{2} = 2,\ a=\sqrt{2}\,(a>1)$

$\overline{AC}=2$에서

$(\sqrt{2})^k-(\sqrt{2})^{k-2}=2,\ (\sqrt{2})^{k-2}\times\{(\sqrt{2})^2-1\}=2,$

$(\sqrt{2})^{k-2}=2,\ k=4$

따라서 $a\times k = 4\sqrt{2}$

13. [출제의도] 도함수를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(0)=1$이므로 다항함수 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

함수 $f(x)$의 차수가 1이면 함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$는 상수함수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 차수를 $n\,(n\geq 2)$라 하면

함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$의 차수는 $2n-2$이므로

$n=2n-2,\ n=2$

실수 $a\,(a\neq 0)$, b, c에 대하여

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=2ax+b$이고 $f'(0)=1$이므로 $b=1$

$(f'(x)+2)(f'(x)-2) = (2ax+3)(2ax-1)$

$= 4a^2x^2+4ax-3$

모든 실수 x에 대하여

$ax^2+x+c = 4a^2x^2+4ax-3$이므로 $a=\frac{1}{4},\ c=-3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x-3$이므로 $f(4)=5$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 도형에 관한 문제를 해결한다.

$\cos(\angle DCB)=\frac{1}{3}$에서 $\sin(\angle DCB)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle DCB)} = 2\times 3,\ \overline{BD}=\boxed{4\sqrt{2}}$이므로

(가)에 알맞은 수는 $4\sqrt{2}$

사각형 ABCD에서

$\angle BAD=\pi-\angle DCB$이므로 $\cos(\angle BAD)=-\frac{1}{3}$

$\overline{AB}=3k,\ \overline{AD}=k\,(k>0)$이라 하면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$(4\sqrt{2})^2 = (3k)^2+k^2-2\times 3k\times k\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$32=12k^2,\ k=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\overline{AD}=\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}},\ \overline{AB}=3\times\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

이므로 (나)에 알맞은 수는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$(4\sqrt{2})^2 = \overline{CB}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\frac{1}{3}$

$32=\frac{4}{3}\overline{CB}^2,\ \overline{CB}=\overline{CD}=\boxed{2\sqrt{6}}$

이므로 (다)에 알맞은 수는 $2\sqrt{6}$

따라서 $p=4\sqrt{2},\ q=\frac{2\sqrt{6}}{3},\ r=2\sqrt{6}$이므로

$\frac{q\times r}{p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\times 2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

15. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 함수를 추론한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$

조건 (가)에서

$f'(1)\times(x-1)+f(1)=f'(4)\times(x-4)+f(4)$

가 x에 대한 항등식이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선은

서로 같다.
이 접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하면
$m=f'(1)=f'(4)$,
$n=f(1)-f'(1)=f(4)-4f'(4)$
$h(x)=f(x)-(mx+n)$ 이라 하면
$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고
$h'(x)=f'(x)-m$
$h(1)=f(1)-m-n=0$,
$h'(1)=f'(1)-m=0$
이므로 $h(x)$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지고,
$h(4)=f(4)-4m-n=0$,
$h'(4)=f'(4)-m=0$
이므로 $h(x)$ 는 $(x-4)^2$ 으로 나누어떨어진다.
그러므로 $h(x)=(x-1)^2(x-4)^2$ 이다.
$f(x)=(x-1)^2(x-4)^2+mx+n$
$\quad=x^4-10x^3+33x^2+(m-40)x+n+16$
에서 $a=33$, $b=m-40$, $n=-16$ 즉,
$f(x)=x^4-10x^3+33x^2+bx$,
$f'(x)=4x^3-30x^2+66x+b$
조건 (나)에서 $g(0)=0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=0$ 이 되는 실수 α 가 존재한다.
$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$ 이므로
$f(x)$ 는 $(x-\alpha)^2$ 으로 나누어떨어진다.
$\alpha=0$ 즉, $f'(0)=0$ 이면 $b=0$ 이고
$f(x)=x^4-10x^3+33x^2=x^2(x^2-10x+33)$
이때 $x^2-10x+33=(x-5)^2+8$ 이므로
$f\left(\frac{7}{2}\right)>0$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $\alpha\neq 0$ 이다.
한편 $f(x)$ 는 x 로 나누어떨어지므로
$f(x)=x(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$ 이 되는 실수 β 가 존재한다.
$x^4-10x^3+33x^2+bx$
$=x(x-\alpha)^2(x-\beta)$
$=x^4-(2\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+2\alpha\beta)x^2-\alpha^2\beta x$
에서 $2\alpha+\beta=10$, $\alpha^2+2\alpha\beta=33$ 이므로
$\alpha^2+2\alpha(10-2\alpha)-33=0$,
$3\alpha^2-20\alpha+33=0$,
$(3\alpha-11)(\alpha-3)=0$ 에서
$\alpha=\frac{11}{3}$ 또는 $\alpha=3$

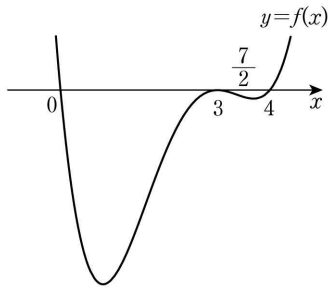
(ⅰ) $\alpha=\frac{11}{3}$ 인 경우

$\beta=\frac{8}{3}$ 이므로 $f(x)=x\left(x-\frac{11}{3}\right)^2\left(x-\frac{8}{3}\right)$

$f\left(\frac{7}{2}\right)>0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha=3$ 인 경우

$\beta=4$ 이므로 $f(x)=x(x-3)^2(x-4)$



$f\left(\frac{7}{2}\right)<0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $f(5)=5\times 2^2\times 1=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(5)=20$

16. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 계산한다.

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{7}a_k+7=30$ 이므로 $\sum_{k=1}^{7}a_k=23$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{7}3a_k=3\times\sum_{k=1}^{7}a_k=3\times 23=69$

17. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.

$F(x)=\int f(x)dx$
$\quad=\int(3x^2+4x-1)dx$
$\quad=x^3+2x^2-x+C$ (C는 상수)
$F(0)=1$ 이므로 $C=1$
$F(x)=x^3+2x^2-x+1$
따라서 $F(2)=2^3+2\times 2^2-2+1=15$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

$-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$ 이고
함수 $f(x)=4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+a$ 의 최솟값이 1이므로
$-4+a=1$, $a=5$
따라서
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+5$
$\quad=4\sin\frac{\pi}{6}+5$
$\quad=4\times\frac{1}{2}+5=7$

19. [출제의도] 삼차함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$
(ⅰ) $a>0$ 인 경우
닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

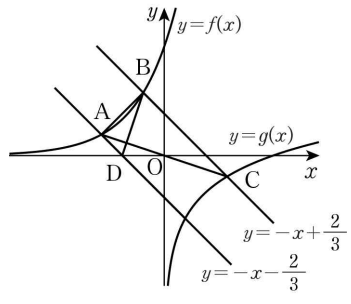
x	0	…	1	…	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	6	↘	$-a+6$	↗	$4a+6$

닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $4a+6$, $x=1$ 에서 최솟값 $-a+6$ 을 갖는다.
그러므로 $4a+6=8$, $-a+6=-2$
이다. 두 방정식을 동시에 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a<0$ 인 경우
닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	1	…	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	6	↗	$-a+6$	↘	$4a+6$

닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $-a+6$, $x=2$ 에서 최솟값 $4a+6$ 을 갖는다.
그러므로 $-a+6=8$, $4a+6=-2$
$a=-2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$ 이므로
$f(x)=-4x^3+6x^2+6$
따라서 $f(-2)=-4\times(-2)^3+6\times(-2)^2+6=62$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.



함수 $f(x)=\sqrt{3}a^x$ 의 역함수는 $g(x)=\log_a\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

두 직선 $y=-x-\frac{2}{3}$, $y=-x+\frac{2}{3}$ 가 평행하므로
$\angle ABC+\angle DAB=180°$
삼각형 CBA 와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로
$\angle ABC=\angle DAB$
그러므로
$\angle ABC=\angle DAB=90°$
양수 k에 대하여 점 A의 좌표를 $\left(-k-\frac{2}{3}, k\right)$라 하면 $\overline{AD}=\sqrt{2}k$
직선 AB의 기울기가 1이므로
점 B의 좌표는 $\left(-k, k+\frac{2}{3}\right)$
점 C의 좌표는 $\left(k+\frac{2}{3}, -k\right)$
$\overline{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\overline{BC}=\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}$
삼각형 CBA 와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로
$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DA}:\overline{AB}$
$\frac{2\sqrt{2}}{3}:\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}=\sqrt{2}k:\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$4k^2+\frac{4}{3}k=\frac{8}{9}$,
$9k^2+3k-2=0$, $(3k-1)(3k+2)=0$
$k>0$ 이므로 $k=\frac{1}{3}$
점 $A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$\frac{1}{3}=\sqrt{3}a^{-1}$, $a=3\sqrt{3}$
따라서 $a^2=27$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가
$x=2$ 에서 극솟값 $\frac{5}{2}$ 를 가지므로
$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$
인 실수 α $(\alpha<2)$가 존재한다.
(ⅰ) $\alpha<0$ 인 경우
$t\ge 2$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$\int_0^t|f'(x)|dx$
$=\int_0^2(-f'(x))dx+\int_2^t f'(x)dx$
$=(-f(2)+f(0))+(f(t)-f(2))$
$=f(t)+f(0)-2f(2)$
에서
$f(t)+f(0)-2f(2)=f(t)+f(0)$, $f(2)=0$
이므로 $f(2)=\frac{5}{2}$ 임에 모순이다.
(ⅱ) $0\le\alpha<2$ 인 경우
$t\ge 2$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$\int_0^t|f'(x)|dx$
$=\int_0^\alpha f'(x)dx+\int_\alpha^2(-f'(x))dx+\int_2^t f'(x)dx$
$=(f(\alpha)-f(0))+(-f(2)+f(\alpha))+(f(t)-f(2))$
$=f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)$
에서
$f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)=f(t)+f(0)$,
$f(\alpha)-f(2)=f(0)$
$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$ 에서
$f(x)=x^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}x^2+6\alpha x+f(0)$
$f(\alpha)-f(2)=f(0)$ 이므로
$\alpha^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}\times\alpha^2+6\alpha\times\alpha+f(0)-\frac{5}{2}=f(0)$,
$\alpha^3-6\alpha^2+5=0$,
$(\alpha-1)(\alpha^2-5\alpha-5)=0$
$\alpha=1$ 또는 $\alpha=\frac{5-\sqrt{45}}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{5+\sqrt{45}}{2}$
$0\le\alpha<2$ 이므로 $\alpha=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+f(0)$

$f(2)=2+f(0)=\frac{5}{2}$ 에서 $f(0)=\frac{1}{2}$ 이므로

$p=2$, $q=1$

따라서 $p+q=3$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

(ⅰ) a_3이 짝수인 경우

$a_4=a_3+3$이고 이는 홀수이다.

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=\frac{1}{2}a_3+6$

a_5가 홀수이면 $a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$

$a_3=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$

즉, $a_3=\frac{34}{3}$가 되어 a_3이 자연수임에 모순이다.

a_5가 짝수이면 $a_6=a_5+5=\frac{1}{2}a_3+11$

$a_3=\frac{1}{2}a_3+11$ 즉, $a_3=22$

이때 $a_5=17$이 되어 a_5가 짝수임에 모순이다.

(ⅱ) a_3이 홀수인 경우

① $a_3=8k-7$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k$,

$a_5=a_4+4=4k+4$,

$a_6=a_5+5=4k+9$

$8k-7=4k+9$ 즉, $k=4$이므로 $a_3=25$

a_2가 짝수이면 $a_2+2=25$, $a_2=23$이 되어

a_2가 짝수임에 모순이다.

a_2가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=25$, $a_2=45$

a_1이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=45$, $a_1=87$

a_1이 짝수이면 $a_1+1=45$, $a_1=44$

따라서 $a_1=87$ 또는 $a_1=44$

② $a_3=8k-5$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+1$,

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+5$,

$a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=k+8$

$8k-5=k+8$ 즉, $k=\frac{13}{7}$이 되어

k가 자연수임에 모순이다.

③ $a_3=8k-3$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+2$,

$a_5=a_4+4=4k+6$,

$a_6=a_5+5=4k+11$

$8k-3=4k+11$ 즉, $k=\frac{7}{2}$이 되어

k가 자연수임에 모순이다.

④ $a_3=8k-1$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+3$,

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+6$,

$a_6=a_5+5=2k+11$

$8k-1=2k+11$ 즉, $k=2$이므로 $a_3=15$

a_2가 짝수이면 $a_2+2=15$, $a_2=13$이 되어

a_2가 짝수임에 모순이다.

a_2가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=15$, $a_2=25$

a_1이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=25$, $a_1=47$

a_1이 짝수이면 $a_1+1=25$, $a_1=24$

따라서 $a_1=47$ 또는 $a_1=24$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a_1의 값은

87, 44, 47, 24이다.

따라서 $87+44+47+24=202$

[확률과 통계]

23	③	*24*	①	*25*	②	*26*	④	*27*	⑤
28	③	*29*	345	*30*	9				

23. [출제의도] 이항정리를 이용하여 항의 계수를 계산한다.

$x^8=(x^2)^4$이므로 x^8의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_4\times2^4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4}=60$

24. [출제의도] 이항분포를 이해하여 미지수를 구한다.

$\mathrm{E}(X)=np=5$, $\mathrm{V}(X)=np(1-p)=5\times(1-p)=4$

$p=\frac{1}{5}$이므로 $n=25$

25. [출제의도] 중복조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

$a+b+c=8-d^3$ $(0\le d\le2)$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a,b,c)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_{8-d^3}$

(ⅰ) $d=0$인 경우

구하는 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$

(ⅱ) $d=1$인 경우

구하는 순서쌍의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

(ⅲ) $d=2$인 경우

구하는 순서쌍의 개수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 모든 순서쌍의 개수는 $45+36+1=82$

26. [출제의도] 모평균의 신뢰구간을 이해하여 미지수와 표준편차를 구한다.

표본평균 $\overline{x}$를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{196}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{196}}$

이므로

$a+82=\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{14}$, $a+84=\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{14}$

$(a+82)+(a+84)=\left(\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{14}\right)+\left(\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{14}\right)=2\overline{x}$

$\overline{x}=a+83$

$\overline{x}=2a+80$에서 $2a+80=a+83$, $a=3$

$(a+84)-(a+82)=2\times1.96\times\frac{\sigma}{14}$, $\sigma=\frac{50}{7}$

따라서

$a\times\sigma=3\times\frac{50}{7}=\frac{150}{7}$

27. [출제의도] 독립시행의 확률을 이해하여 확률을 구한다.

두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 경우의 수는

$6\times6=36$

두 개의 주사위를 동시에 던져 나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 A라 하자.

두 수의 곱이 홀수가 되려면 두 수 모두 홀수이어야 하므로 사건 A가 일어날 확률은 $\frac{3\times3}{36}=\frac{1}{4}$

이 시행을 4번 반복한 후 주머니에 들어 있는 공의 개수가 5 이하가 되려면 4번의 시행에서

사건 A가 3번 또는 4번 일어나야 한다.

사건 A가 3번 일어날 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{12}{256}$

사건 A가 4번 일어날 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{256}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{256}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$

28. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

1번째 자리에 숫자 2 또는 4가 적힌 카드를 놓을 수 있다.

1번째 자리에 숫자 2가 적힌 카드를 놓는다고 하자.

(ⅰ) 나머지 5개의 자리에 놓인 카드에 적힌 숫자가 a, a, b, c, d인 경우

a는 1 또는 3 또는 4이므로

a를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

b, c, d는 1, 2, 3, 4 중 a가 아닌 수이므로

b, c, d를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_3=1$

a, a, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!1!1!1!}=60$

그러므로 이 경우의 수는 $3\times1\times60=180$

(ⅱ) 나머지 5개의 자리에 놓인 카드에 적힌 숫자가 a, a, b, b, c인 경우

a, b는 1 또는 3 또는 4이므로

a, b를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

c는 1, 2, 3, 4 중 a, b가 아닌 수이므로

c를 정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!1!}=30$

그러므로 이 경우의 수는 $3\times2\times30=180$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 1번째 자리에 숫자 2가 적힌 카드를 놓을 때, 조건을 만족시키는 경우의 수는

$180+180=360$

마찬가지 방법으로 1번째 자리에 숫자 4가 적힌 카드를 놓을 때, 조건을 만족시키는 경우의 수는 360

따라서 구하는 경우의 수는 $360+360=720$

29. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 추론한다.

함수 $f(x)$는 $x=m_1$에서 최댓값을 가지므로

조건 (가)에서 $m_1=4$

확률변수 X와 Y의 표준편차가 같으므로

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$의 모양이 같다.

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이고,

곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이므로

조건 (나)에서 $|m_1-5|=|m_2-15|$

$m_1=4$이므로 $m_2=14$ 또는 $m_2=16$

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(1\le X\le2)+\mathrm{P}(7\le X\le9)$

$=\mathrm{P}(6\le X\le7)+\mathrm{P}(7\le X\le9)$

$=\mathrm{P}(6\le X\le9)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{6-4}{10}\le Z\le\frac{9-4}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(0.2\le Z\le0.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.2)=0.112$

(ⅰ) $m_2=14$인 경우

$\mathrm{P}(11\le Y\le14)=\mathrm{P}\left(\frac{11-m_2}{10}\le Z\le\frac{14-m_2}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.3\le Z\le0)=0.118$

(ⅱ) $m_2=16$인 경우

$\mathrm{P}(11\le Y\le14)=\mathrm{P}\left(\frac{11-m_2}{10}\le Z\le\frac{14-m_2}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le-0.2)=0.112$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $m_2=16$

$\mathrm{P}(Y\ge20)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{20-16}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0.4)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.4)=0.345$

$k=0.345$이므로 $1000\times k=345$

30. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

$a_1=a_2=1$인 사건을 X, 두 번째 시행 후

주머니 B에 숫자 1이 적힌 공 3개가 들어 있는 사건을 Y라 하자. $n\,(n=1, 2)$번째 시행에서 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수를 각각 x_n, y_n이라 하자. 사건 X가 일어날 확률을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $y_1=1$, $y_2=1$인 경우

모든 x_1, x_2의 값에 대하여 $a_1=a_2=1$

$a_1=a_2=1$일 확률은 $\left(\frac{5}{5}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{4}{4}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{5}$

(ⅱ) $y_1=1$, $y_2=2$인 경우

모든 x_1의 값에 대하여 $a_1=1$

$a_2=1$이므로 $x_2=1$

$x_1=1$, $x_2=1$일 확률은 $\left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{50}$

$x_1=2$, $x_2=1$일 확률은 $\left(\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{50}$

$a_1=a_2=1$일 확률은 $\frac{3}{50}+\frac{3}{50}=\frac{3}{25}$

(ⅲ) $y_1=2$, $y_2=1$인 경우

$a_1=1$이므로 $x_1=1$

모든 x_2의 값에 대하여 $a_2=1$

$a_1=a_2=1$일 확률은 $\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}\right)=\frac{3}{25}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$\mathrm{P}(X)=\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}=\frac{21}{25}$

$a_1=a_2=1$이고 두 번째 시행 후 주머니 B에 숫자 1이 적힌 공 3개가 들어 있는 경우는 (ⅱ), (ⅲ)이므로 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{3}{25}+\frac{3}{25}=\frac{6}{25}$

그러므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{6}{25}}{\frac{21}{25}}=\frac{2}{7}$

$p=7$, $q=2$이므로 $p+q=9$