• 수학 영역 •

※ 본 전국연합학력평가는 16개 시도교육청 주관으로 시행되며, 문제지는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

정 답

1	②	2	①	3	②	4	⑤	5	④
6	①	7	③	8	④	9	⑤	10	③
11	②	12	④	13	③	14	①	15	④
16	69	17	15	18	7	19	62	20	27
21	3	22	202						

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$\sqrt[3]{2}\times 4^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=3x^2+3$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) = 3+3 = 6$

3. [출제의도] 등비수열의 정의를 이해하여 항의 값을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$\frac{a_2a_3}{a_1a_2} = \frac{a_1r\times a_1r^2}{a_1\times a_1r} = r^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4,\ r=2$

$a_1a_2 = a_1^2\times 2 = \frac{1}{2},\ a_1^2 = \frac{1}{4},\ a_1 = \frac{1}{2}\,(a_1>0)$

따라서 $a_4 = a_1r^3 = \frac{1}{2}\times 2^3 = 4$

4. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$

$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-}(x^2-3x) = a^2-3a,\ f(a)=a-4$

이므로 $a^2-3a = a-4,\ (a-2)^2=0$

따라서 $a=2$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=x^2+3x+1+(x+1)(2x+3)$ 이므로

$f'(2)=11+21=32$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 2,\ \sin^2\theta = 2\cos^2\theta$

$1-\cos^2\theta = 2\cos^2\theta,\ \cos^2\theta = \frac{1}{3}$

θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

따라서 $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. [출제의도] 정적분을 이해하여 두 곡선 사이의 넓이를 구한다.

$\frac{1}{2}x^2+2 > -\frac{1}{4}x^2-1$ 이므로 구하는 부분의 넓이는

$\int_0^2\left\{\left(\frac{1}{2}x^2+2\right)-\left(-\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$

$= \int_0^2\left(\frac{3}{4}x^2+3\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^3+3x\right]_0^2 = 8$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$\log_a b = 2$ 이므로 $b=a^2$

$\log_2 a+\log_4 b = \log_2 a+\log_4 a^2 = \log_2 a+\log_2 a = 8$

$\log_2 a = 4,\ a=2^4,\ b=a^2=(2^4)^2=2^8$

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{2^8}{2^4} = 2^4 = 16$

9. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이해하여 실수의 값을 구한다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = 5$ …… ㉠

이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)(x-3)\}=0$에서 $f(a)(a-3)=0$

(i) $a=3$인 경우

㉠에서 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=5$이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)=0$

그러므로 $f(x)=(x-3)(x-b)$ (b는 실수)이다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)(x-3)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to 3}(x-b) = 3-b=5,\ b=-2$

이므로 $f(x)=(x-3)(x+2)$

(ii) $a\neq 3$이고 $f(a)=0$인 경우

$f(x)=(x-a)(x-c)$ (c는 실수)이다.

㉠에서 $\lim_{x\to a}\frac{(x-c)(x-3)}{x-a}=5$이므로

$\lim_{x\to a}\{(x-c)(x-3)\} = (a-c)(a-3)=0,\ a=c$

이다. 그러므로 $f(x)=(x-a)^2$이고 ㉠에서

$\lim_{x\to a}(x-3) = a-3=5,\ a=8$

그러므로 $f(x)=(x-8)^2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 a의 값은 3, 8

따라서 $3+8=11$

10. [출제의도] 등차수열의 성질을 이해하여 자연수의 합을 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_2+a_9 = (18+d)+(18+8d)=0$ 이므로 $d=-4$

$S_k = \frac{k\{36+(k-1)\times(-4)\}}{2} = -2k^2+20k$

$|S_k|=48$에서 $S_k=48$ 또는 $S_k=-48$

(i) $S_k=48$인 경우

$-2k^2+20k=48,\ k^2-10k+24=0$

$(k-4)(k-6)=0$이므로 $k=4$ 또는 $k=6$

(ii) $S_k=-48$인 경우

$-2k^2+20k=-48,\ k^2-10k-24=0$

$(k-12)(k+2)=0,\ k$가 자연수이므로 $k=12$

(i), (ii)에서 구하는 모든 자연수 k의 값은

4, 6, 12

따라서 $4+6+12=22$

11. [출제의도] 정적분을 이용하여 점의 위치와 움직인 거리를 구하는 문제를 해결한다.

ㄱ. 시각 $t=4$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$v(4)=16-4(a+5)+8=0$

$-4a+4=0,\ a=1$ (참)

ㄴ. $v(t)=t^2-6t+8$이므로

시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$\int_0^3(t^2-6t+8)dt = \left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^3 = 6$ (참)

ㄷ. $v(t)=t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$이므로

시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^4|v(t)|dt = \int_0^2 v(t)dt+\int_2^4(-v(t))dt$

$= \int_0^2(t^2-6t+8)dt+\int_2^4(-t^2+6t-8)dt$

$= \left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_2^4$

$=8$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

12. [출제의도] 지수함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$A(k,\ a^k)$, $B(k+2,\ a^{k+2})$, $C(k,\ a^{k-2})$, $D(k+2,\ a^k)$

$\overline{AC}=\overline{AD}$이고 $\overline{AD}=2$이므로 $\overline{AC}=2$

$\overline{AC}+\overline{BD}=6$이므로 $\overline{BD}=4$

$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{a^{k+2}-a^k}{a^k-a^{k-2}} = a^2 = \frac{4}{2} = 2,\ a=\sqrt{2}\,(a>1)$

$\overline{AC}=2$에서

$(\sqrt{2})^k-(\sqrt{2})^{k-2}=2,\ (\sqrt{2})^{k-2}\times\{(\sqrt{2})^2-1\}=2,$

$(\sqrt{2})^{k-2}=2,\ k=4$

따라서 $a\times k = 4\sqrt{2}$

13. [출제의도] 도함수를 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$f'(0)=1$이므로 다항함수 $f(x)$는 상수함수가 아니다.

함수 $f(x)$의 차수가 1이면 함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$는 상수함수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

함수 $f(x)$의 차수를 $n\,(n\geq 2)$라 하면

함수 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)$의 차수는 $2n-2$이므로

$n=2n-2,\ n=2$

실수 $a\,(a\neq 0)$, b, c에 대하여

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=2ax+b$이고 $f'(0)=1$이므로 $b=1$

$(f'(x)+2)(f'(x)-2) = (2ax+3)(2ax-1)$

$= 4a^2x^2+4ax-3$

모든 실수 x에 대하여

$ax^2+x+c = 4a^2x^2+4ax-3$이므로 $a=\frac{1}{4},\ c=-3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x-3$이므로 $f(4)=5$

14. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 도형에 관한 문제를 해결한다.

$\cos(\angle DCB)=\frac{1}{3}$에서 $\sin(\angle DCB)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle DCB)} = 2\times 3,\ \overline{BD}=\boxed{4\sqrt{2}}$이므로

(가)에 알맞은 수는 $4\sqrt{2}$

사각형 ABCD에서

$\angle BAD=\pi-\angle DCB$이므로 $\cos(\angle BAD)=-\frac{1}{3}$

$\overline{AB}=3k,\ \overline{AD}=k\,(k>0)$이라 하면

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$(4\sqrt{2})^2 = (3k)^2+k^2-2\times 3k\times k\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$32=12k^2,\ k=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$\overline{AD}=\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}},\ \overline{AB}=3\times\boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

이므로 (나)에 알맞은 수는 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$(4\sqrt{2})^2 = \overline{CB}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\frac{1}{3}$

$32=\frac{4}{3}\overline{CB}^2,\ \overline{CB}=\overline{CD}=\boxed{2\sqrt{6}}$

이므로 (다)에 알맞은 수는 $2\sqrt{6}$

따라서 $p=4\sqrt{2},\ q=\frac{2\sqrt{6}}{3},\ r=2\sqrt{6}$이므로

$\frac{q\times r}{p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\times 2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

15. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 함수를 추론한다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(s)(x-s)+f(s)$

조건 (가)에서

$f'(1)\times(x-1)+f(1)=f'(4)\times(x-4)+f(4)$

가 x에 대한 항등식이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선과 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선은

서로 같다.
이 접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하면
$m=f'(1)=f'(4)$,
$n=f(1)-f'(1)=f(4)-4f'(4)$
$h(x)=f(x)-(mx+n)$ 이라 하면
$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고
$h'(x)=f'(x)-m$
$h(1)=f(1)-m-n=0$,
$h'(1)=f'(1)-m=0$
이므로 $h(x)$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지고,
$h(4)=f(4)-4m-n=0$,
$h'(4)=f'(4)-m=0$
이므로 $h(x)$ 는 $(x-4)^2$ 으로 나누어떨어진다.
그러므로 $h(x)=(x-1)^2(x-4)^2$ 이다.
$f(x)=(x-1)^2(x-4)^2+mx+n$
$\quad=x^4-10x^3+33x^2+(m-40)x+n+16$
에서 $a=33$, $b=m-40$, $n=-16$ 즉,
$f(x)=x^4-10x^3+33x^2+bx$,
$f'(x)=4x^3-30x^2+66x+b$
조건 (나)에서 $g(0)=0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선의 방정식이 $y=0$ 이 되는 실수 α 가 존재한다.
$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$ 이므로
$f(x)$ 는 $(x-\alpha)^2$ 으로 나누어떨어진다.
$\alpha=0$ 즉, $f'(0)=0$ 이면 $b=0$ 이고
$f(x)=x^4-10x^3+33x^2=x^2(x^2-10x+33)$
이때 $x^2-10x+33=(x-5)^2+8$ 이므로
$f\left(\frac{7}{2}\right)>0$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.
그러므로 $\alpha\neq 0$ 이다.
한편 $f(x)$ 는 x 로 나누어떨어지므로
$f(x)=x(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$ 이 되는 실수 β 가 존재한다.
$x^4-10x^3+33x^2+bx$
$=x(x-\alpha)^2(x-\beta)$
$=x^4-(2\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+2\alpha\beta)x^2-\alpha^2\beta x$
에서 $2\alpha+\beta=10$, $\alpha^2+2\alpha\beta=33$ 이므로
$\alpha^2+2\alpha(10-2\alpha)-33=0$,
$3\alpha^2-20\alpha+33=0$,
$(3\alpha-11)(\alpha-3)=0$ 에서
$\alpha=\frac{11}{3}$ 또는 $\alpha=3$

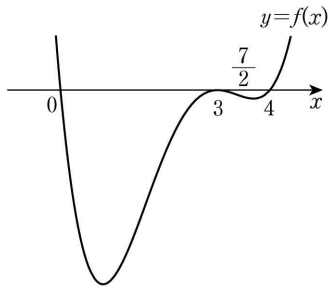
(ⅰ) $\alpha=\frac{11}{3}$ 인 경우

$\beta=\frac{8}{3}$ 이므로 $f(x)=x\left(x-\frac{11}{3}\right)^2\left(x-\frac{8}{3}\right)$

$f\left(\frac{7}{2}\right)>0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\alpha=3$ 인 경우

$\beta=4$ 이므로 $f(x)=x(x-3)^2(x-4)$



$f\left(\frac{7}{2}\right)<0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 $f(5)=5\times 2^2\times 1=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(5)=20$

16. [출제의도] $\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 계산한다.

$\sum_{k=1}^{7}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{7}a_k+7=30$ 이므로 $\sum_{k=1}^{7}a_k=23$ 이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{7}3a_k=3\times\sum_{k=1}^{7}a_k=3\times 23=69$

17. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.

$F(x)=\int f(x)dx$
$\quad=\int(3x^2+4x-1)dx$
$\quad=x^3+2x^2-x+C$ (C는 상수)
$F(0)=1$ 이므로 $C=1$
$F(x)=x^3+2x^2-x+1$
따라서 $F(2)=2^3+2\times 2^2-2+1=15$

18. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

$-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$ 이고
함수 $f(x)=4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+a$ 의 최솟값이 1이므로
$-4+a=1$, $a=5$
따라서
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+5$
$\quad=4\sin\frac{\pi}{6}+5$
$\quad=4\times\frac{1}{2}+5=7$

19. [출제의도] 삼차함수의 그래프를 이해하여 함숫값을 구한다.

$f'(x)=6ax^2-6ax=6ax(x-1)$
$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=1$
(ⅰ) $a>0$ 인 경우
닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

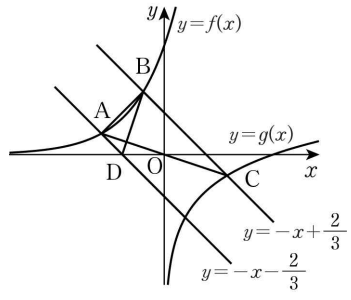
x	0	…	1	…	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	6	↘	$-a+6$	↗	$4a+6$

닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 $4a+6$, $x=1$ 에서 최솟값 $-a+6$ 을 갖는다.
그러므로 $4a+6=8$, $-a+6=-2$
이다. 두 방정식을 동시에 만족시키는 a 는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a<0$ 인 경우
닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	1	…	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	6	↗	$-a+6$	↘	$4a+6$

닫힌구간 $[0,2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $-a+6$, $x=2$ 에서 최솟값 $4a+6$ 을 갖는다.
그러므로 $-a+6=8$, $4a+6=-2$
$a=-2$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$ 이므로
$f(x)=-4x^3+6x^2+6$
따라서 $f(-2)=-4\times(-2)^3+6\times(-2)^2+6=62$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.



함수 $f(x)=\sqrt{3}a^x$ 의 역함수는 $g(x)=\log_a\frac{x}{\sqrt{3}}$ 이다.

두 직선 $y=-x-\frac{2}{3}$, $y=-x+\frac{2}{3}$ 가 평행하므로
$\angle ABC+\angle DAB=180°$
삼각형 CBA 와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로
$\angle ABC=\angle DAB$
그러므로
$\angle ABC=\angle DAB=90°$
양수 k에 대하여 점 A의 좌표를 $\left(-k-\frac{2}{3}, k\right)$라 하면 $\overline{AD}=\sqrt{2}k$
직선 AB의 기울기가 1이므로
점 B의 좌표는 $\left(-k, k+\frac{2}{3}\right)$
점 C의 좌표는 $\left(k+\frac{2}{3}, -k\right)$
$\overline{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\overline{BC}=\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}$
삼각형 CBA 와 삼각형 BAD가 서로 닮음이므로
$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DA}:\overline{AB}$
$\frac{2\sqrt{2}}{3}:\left(2k+\frac{2}{3}\right)\sqrt{2}=\sqrt{2}k:\frac{2\sqrt{2}}{3}$
$4k^2+\frac{4}{3}k=\frac{8}{9}$,
$9k^2+3k-2=0$, $(3k-1)(3k+2)=0$
$k>0$ 이므로 $k=\frac{1}{3}$
점 $A\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$\frac{1}{3}=\sqrt{3}a^{-1}$, $a=3\sqrt{3}$
따라서 $a^2=27$

21. [출제의도] 정적분을 이용하여 함수를 추론한다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가
$x=2$ 에서 극솟값 $\frac{5}{2}$ 를 가지므로
$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$
인 실수 α $(\alpha<2)$가 존재한다.
(ⅰ) $\alpha<0$ 인 경우
$t\ge 2$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$\int_0^t|f'(x)|dx$
$=\int_0^2(-f'(x))dx+\int_2^t f'(x)dx$
$=(-f(2)+f(0))+(f(t)-f(2))$
$=f(t)+f(0)-2f(2)$
에서
$f(t)+f(0)-2f(2)=f(t)+f(0)$, $f(2)=0$
이므로 $f(2)=\frac{5}{2}$ 임에 모순이다.
(ⅱ) $0\le\alpha<2$ 인 경우
$t\ge 2$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$\int_0^t|f'(x)|dx$
$=\int_0^\alpha f'(x)dx+\int_\alpha^2(-f'(x))dx+\int_2^t f'(x)dx$
$=(f(\alpha)-f(0))+(-f(2)+f(\alpha))+(f(t)-f(2))$
$=f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)$
에서
$f(t)-f(0)+2f(\alpha)-2f(2)=f(t)+f(0)$,
$f(\alpha)-f(2)=f(0)$
$f'(x)=3(x-\alpha)(x-2)$ 에서
$f(x)=x^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}x^2+6\alpha x+f(0)$
$f(\alpha)-f(2)=f(0)$ 이므로
$\alpha^3-\frac{3(\alpha+2)}{2}\times\alpha^2+6\alpha\times\alpha+f(0)-\frac{5}{2}=f(0)$,
$\alpha^3-6\alpha^2+5=0$,
$(\alpha-1)(\alpha^2-5\alpha-5)=0$
$\alpha=1$ 또는 $\alpha=\frac{5-\sqrt{45}}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{5+\sqrt{45}}{2}$
$0\le\alpha<2$ 이므로 $\alpha=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x+f(0)$

$f(2)=2+f(0)=\frac{5}{2}$ 에서 $f(0)=\frac{1}{2}$ 이므로

$p=2$, $q=1$

따라서 $p+q=3$

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값을 추론한다.

(ⅰ) a_3이 짝수인 경우

$a_4=a_3+3$이고 이는 홀수이다.

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=\frac{1}{2}a_3+6$

a_5가 홀수이면 $a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$

$a_3=\frac{1}{4}a_3+\frac{17}{2}$

즉, $a_3=\frac{34}{3}$가 되어 a_3이 자연수임에 모순이다.

a_5가 짝수이면 $a_6=a_5+5=\frac{1}{2}a_3+11$

$a_3=\frac{1}{2}a_3+11$ 즉, $a_3=22$

이때 $a_5=17$이 되어 a_5가 짝수임에 모순이다.

(ⅱ) a_3이 홀수인 경우

① $a_3=8k-7$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k$,

$a_5=a_4+4=4k+4$,

$a_6=a_5+5=4k+9$

$8k-7=4k+9$ 즉, $k=4$이므로 $a_3=25$

a_2가 짝수이면 $a_2+2=25$, $a_2=23$이 되어

a_2가 짝수임에 모순이다.

a_2가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=25$, $a_2=45$

a_1이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=45$, $a_1=87$

a_1이 짝수이면 $a_1+1=45$, $a_1=44$

따라서 $a_1=87$ 또는 $a_1=44$

② $a_3=8k-5$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+1$,

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+5$,

$a_6=\frac{1}{2}(a_5+1)+5=k+8$

$8k-5=k+8$ 즉, $k=\frac{13}{7}$이 되어

k가 자연수임에 모순이다.

③ $a_3=8k-3$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+2$,

$a_5=a_4+4=4k+6$,

$a_6=a_5+5=4k+11$

$8k-3=4k+11$ 즉, $k=\frac{7}{2}$이 되어

k가 자연수임에 모순이다.

④ $a_3=8k-1$ (k는 자연수)라 하자.

$a_4=\frac{1}{2}(a_3+1)+3=4k+3$,

$a_5=\frac{1}{2}(a_4+1)+4=2k+6$,

$a_6=a_5+5=2k+11$

$8k-1=2k+11$ 즉, $k=2$이므로 $a_3=15$

a_2가 짝수이면 $a_2+2=15$, $a_2=13$이 되어

a_2가 짝수임에 모순이다.

a_2가 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_2+1)+2=15$, $a_2=25$

a_1이 홀수이면 $\frac{1}{2}(a_1+1)+1=25$, $a_1=47$

a_1이 짝수이면 $a_1+1=25$, $a_1=24$

따라서 $a_1=47$ 또는 $a_1=24$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a_1의 값은

87, 44, 47, 24이다.

따라서 $87+44+47+24=202$

[기하]

23	⑤	*24*	③	*25*	④	*26*	①	*27*	②
28	③	*29*	640	*30*	43				

23. [출제의도] 두 벡터의 차를 계산한다.

$\vec{a}-2\vec{b}=(1, 3)-2(-2, 1)=(5, 1)$이므로 $k=5$

24. [출제의도] 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이해하여 미지수를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6^2}=1$의 한 점근선의 기울기는

$\frac{6}{a}$ 또는 $-\frac{6}{a}$

$a>0$이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$이므로

$\frac{6}{a}=2$, $a=3$

25. [출제의도] 좌표공간에서 점의 대칭이동을 이해하여 선분의 길이를 구한다.

점 B는 점 A$(1, 2, k)$를 xy평면에 대하여

대칭이동한 점이므로 점 B의 좌표는 $(1, 2, -k)$

점 C는 점 A$(1, 2, k)$를 x축에 대하여

대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 $(1, -2, -k)$

$\overline{AB}=4$이고 $k>0$이므로 $2k=4$, $k=2$

두 점 A$(1, 2, 2)$, C$(1, -2, -2)$에 대하여

$\overline{AC}=\sqrt{(1-1)^2+(-2-2)^2+(-2-2)^2}$

$=4\sqrt{2}$

26. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식을 이해하여 점과 준선 사이의 거리를 구한다.

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 2인

직선의 방정식은 $y=2x+\frac{p}{2}$이므로

$2x+1=2x+\frac{p}{2}$에서 $p=2$

점 P는 직선 $y=2x+1$ 위의 점이면서 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 2a+1)$이라 하면

$(2a+1)^2=8a$, $(2a-1)^2=0$, $a=\frac{1}{2}$

포물선 $y^2=8x$의 준선의 방정식은 $x=-2$이므로

점 P$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$와 준선 사이의 거리는 $\frac{1}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$

27. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하여 원기둥의 높이를 구한다.

원 C_1을 포함한 평면을 α라 하자.

점 D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 D′이라 하면

D′은 원 C_1 위에 있다.

선분 AB는 원 C_1의 지름이므로 $\angle AD'B=\frac{\pi}{2}$이다.

점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발이 B이고

원기둥의 두 밑면은 서로 평행하므로

두 직선 CD, BD′은 서로 평행하다.

두 직선 AB, BD′이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

직각삼각형 AD′B에서 $\overline{AD'}=4$, $\overline{BD'}=4\sqrt{3}$

점 D′에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{AD'}\times\overline{BD'}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{HD'}$, $\overline{HD'}=2\sqrt{3}$

직선 DD′은 평면 α와 수직이고 $\overline{AB}\perp\overline{HD'}$이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AB}\perp\overline{HD}$

삼각형 ABD의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{HD}=24$, $\overline{HD}=6$

이 원기둥의 높이를 h라 하면 $\overline{DD'}=h$

직각삼각형 DD′H에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{HD'}^2+\overline{DD'}^2=\overline{HD}^2$, $(2\sqrt{3})^2+h^2=6^2$, $h^2=24$

$h>0$이므로 $h=2\sqrt{6}$

28. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 삼각형의 둘레의 길이를 구하는 문제를 해결한다.

선분 F′Q의 길이와 타원 C의 장축의 길이가

같으므로 $\overline{F'P}+\overline{PQ}=\overline{F'Q}=\overline{F'P}+\overline{FP}$, $\overline{PQ}=\overline{FP}$

삼각형 PFQ는 이등변삼각형이므로 $\angle PQF=\angle QFP$

$\angle FF'P=\angle QFP$에서 $\angle FF'P=\angle PQF$

삼각형 F′FQ는 $\overline{FQ}=\overline{F'F}=2c$인 이등변삼각형이다.

$\angle FF'P=\theta$라 하면 $\tan\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{4}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\overline{FQ}=2\times\overline{FP}\times\cos\theta$, $\overline{FP}=\frac{4}{3}c$

삼각형 PFQ의 넓이가 $6\sqrt{7}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{FP}\times\overline{FQ}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}c\times2c\times\frac{\sqrt{7}}{4}=6\sqrt{7}$, $c=3\sqrt{2}$

$\overline{F'Q}=2\times\overline{F'F}\times\cos\theta=3c$이므로

삼각형 F′RQ의 둘레의 길이는

$\overline{F'Q}+\overline{F'R}+\overline{RQ}=\overline{F'Q}+\overline{F'R}+(\overline{FR}+\overline{FQ})$

$=\overline{F'Q}+(\overline{F'R}+\overline{FR})+\overline{FQ}$

$=\overline{F'Q}+\overline{F'Q}+\overline{FQ}=8c=24\sqrt{2}$

29. [출제의도] 이면각의 크기를 구하여 정사영의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{AP}=4$

Q는 선분 AD를 1 : 2로 내분하는 점이므로 $\overline{AQ}=2$

직선 RS와 평면 AEHD가 수직이므로

$\overline{AR}\perp\overline{RS}$, $\overline{QR}\perp\overline{RS}$이다.

$\overline{RS}=6$이고 삼각형 QRS의 넓이가 $3\sqrt{10}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{RS}=3\sqrt{10}$에서 $\overline{QR}=\sqrt{10}$

점 Q에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 T라 하면

$\overline{ET}=\overline{AQ}=2$

$\overline{ER}=a\ (0<a<2)$라 하면 $\overline{TR}=2-a$

삼각형 RTQ는 $\angle RTQ=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{QR}^2=\overline{TR}^2+\overline{TQ}^2$, $(\sqrt{10})^2=(2-a)^2+3^2$, $a=1$

삼각형 AER은 $\angle AER=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AR}^2=\overline{AE}^2+\overline{ER}^2$, $\overline{AR}^2=3^2+1^2$, $\overline{AR}=\sqrt{10}$

두 직선 AB, RS는 서로 평행하므로

네 점 A, B, R, S는 한 평면 위에 있다.

점 P가 평면 ARSB 위에 있으므로

평면 ARP는 평면 ARSB와 같다.

두 평면 ARP, QRS의 교선이 RS이고

$\overline{AR}\perp\overline{RS}$, $\overline{QR}\perp\overline{RS}$이므로

두 직선 AR, QR이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

두 평면 ARP, QRS가 이루는 각의 크기는 θ이다.

삼각형 ARQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AQ}^2=\overline{AR}^2+\overline{QR}^2-2\times\overline{AR}\times\overline{QR}\times\cos\theta$

$2^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{4}{5}$

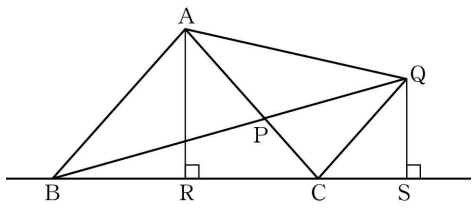
삼각형 ARP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AR}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}$이므로

정사영의 넓이 S는 $2\sqrt{10}\times\frac{4}{5}=\frac{8\sqrt{10}}{5}$

따라서 $25S^2=25\times\left(\frac{8\sqrt{10}}{5}\right)^2=640$

30. [출제의도] 평면벡터의 관계를 추론하여 내적의 값을 구한다.



$5\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$ 에서 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}}{5}$ 이므로

P는 선분 AC를 3:2로 내분하는 점이다.

P는 두 직선 AC, BQ의 교점이므로 $\angle APB=\angle CPQ$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{PB}$ 에서

$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{PQ}|\cos(\angle CPQ)=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{PB}|\cos(\angle APB)$

$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{PB}|$, $\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{CP}|}=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PQ}|}$

두 삼각형 BPA, QPC는 서로 닮음이므로

$\overline{PB}:\overline{PQ}=\overline{AP}:\overline{CP}=3:2$

삼각형 ABP의 넓이는 삼각형 APQ의 넓이의 $\dfrac{3}{2}$ 배,

삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABP의 넓이의 $\dfrac{5}{3}$ 배

이므로 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{3}=2\sqrt{5}$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)=2\sqrt{5}$ 에서

$\sin(\angle BAC)=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로 $\angle BAC<\dfrac{\pi}{2}$

$\cos(\angle BAC)=\sqrt{1-\sin^2(\angle BAC)}=\dfrac{1}{9}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos(\angle BAC)$

$\overline{BC}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\dfrac{1}{9}$, $\overline{BC}=4$

두 삼각형 BPA, QPC는 서로 닮음이므로

$\angle PBA=\angle PQC$가 되어 두 직선 AB, CQ는

서로 평행하다.

두 점 A, Q에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각

R, S라 하면 R은 선분 BC의 중점이고,

두 삼각형 ABR, QCS는 서로 닮음이다.

$\overline{AB}:\overline{QC}=3:2$ 이므로 $\overline{CS}=\overline{BR}\times\dfrac{2}{3}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

$\overline{RS}=\overline{RC}+\overline{CS}=2+\dfrac{4}{3}=\dfrac{10}{3}$

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BC}=\overline{RS}\times\overline{BC}=\dfrac{10}{3}\times4=\dfrac{40}{3}$

$p=3$, $q=40$ 이므로 $p+q=43$